Uniwersytet
Ekonomiczny
w Katowicach

Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe
Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach
ISSN 2083-8611 Nr 335 · 2017

Informatyka i Ekonometria 9

Adrianna Mastalerz-Kodzis

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach
Wydział Zarządzania
Katedra Statystyki, Ekonometrii i Matematyki
adrianna.mastalerz-kodzis@ue.katowice.pl

ZASTOSOWANIE WYKŁADNIKA HURSTA ORAZ FUNKCJI HÖLDERA W MODELU BLACKA-SCHOLESA

Streszczenie: W artykule zaprezentowano modyfikację klasycznego modelu Blacka--Scholesa. Uwzględniono istnienie efektu pamięci w finansowych szeregach czasowych i wprowadzono do modelu wyceny instrumentów finansowych wykładnik Hursta oraz funkcję Höldera. Niniejszy artykuł składa się z części teoretycznej, w której przybliżono założenia i postać teoretyczną klasycznego modelu Blacka-Scholesa oraz omówiono jego wybrane modyfikacje, a także z części aplikacyjnej, w której ukazano efektywność uzyskanych rozwiązań.

Słowa kluczowe: proces stochastyczny, model Blacka-Scholesa, instrumenty pochodne, wykładnik Hursta, funkcja Höldera.

JEL Classification: E44, G11, G17.

Wprowadzenie

Proces inwestycyjny jest związany z ryzykiem. Ryzyko na rynku kapitałowym można mierzyć, minimalizować za pomocą odpowiednich metod optymalizacyjnych, jednakże nie da się go wyeliminować. W celu zmniejszenia ryzyka istnieje konieczność korzystania z instrumentów możliwie najlepiej zabezpieczających przed stratą finansową. Takimi walorami są instrumenty pochodne, od lat wykorzystywane w procesie podejmowania decyzji inwestycyjnych. Zastosowanie instrumentów pochodnych pozwala na efektywne zarządzanie ryzykiem finansowym.

Celem pracy jest wycena opcji oparta na klasycznym wzorcu Blacka-Scholesa, zastosowanie modyfikacji modelu z wykorzystaniem wykładnika Hursta oraz specyfikacja wartości wybranych parametrów w tym modelu, a także analiza możliwości zastosowania funkcji Höldera w zmodyfikowanym modelu Heyde'a i Leonenki.

W artykule w części pierwszej zaprezentowano rys historyczny omawianych zagadnień oraz krótko przedstawiono znaczenie i rodzaje instrumentów pochodnych. W rozdziale drugim omówiono klasyczny model Blacka-Scholesa oraz jego wybrane modyfikacje, zaś rozdział trzeci zawiera propozycję polegającą na zastosowaniu jako miary ryzyka funkcji Höldera. Rozdział czwarty to analiza empiryczna będąca porównaniem omawianych modeli. Artykuł kończy podsumowanie.

1. Instrumenty pochodne

W dziełach Arystotelesa sprzed 2400 lat można znaleźć pierwsze informacje dotyczące instrumentów pochodnych. Transakcje z wykorzystaniem tych instrumentów rozpowszechniły się na rynkach towarowych w XVII-XVIII w.

W 1944 r. na konferencji w Bretton Woods przyjęto system monetarny oparty na walucie papierowej. Ustalono zasady wymienialności walut w stosunku do dolara amerykańskiego i do złota (tzw. parytety). Zobowiązano banki centralne do ingerencji, w przypadku gdy ustalone na konferencji stałe kursy walut będą się różnić od kursów rynkowych o więcej niż 1%. W 1973 r. porozumienie z Bretton Woods upadło na skutek znacznych podwyżek cen ropy przez kraje OPEC. Wprowadzenie zmiennych kursów walutowych zwiększyło ryzyko związane z międzynarodowymi transakcjami finansowymi. Spowodowało to zapotrzebowanie na rynku na nowe instrumenty finansowe, nadające się do zarządzania tym ryzykiem. W latach 80. XX w. wprowadzono opcje na waluty, indeksy giełdowe i kontrakty terminowe.

Instrumenty pochodne (derywaty) to walory, których ceny (oraz wartości) zależą od cen innych instrumentów finansowych (tzw. instrumentów bazowych). Zabezpieczają portfel inwestycyjny przed niekorzystnymi ruchami cen na giełdach. Wykorzystując instrumenty pochodne, można w dowolny sposób modelować funkcję wypłaty portfela, dopasowując ją do indywidualnych potrzeb inwestora. Są narzędziem służącym do zmniejszenia ryzyka inwestycyjnego, pozwalają na efektywne zarządzanie ryzykiem finansowym. Wyróżnia się następujące instrumenty pochodne [Crawford, Sen, 1998; Weron, Weron, 1998; Marciniak, 2001; Mastalerz-Kodzis, 2011; Jajuga, Jajuga, 2015]: kontrakty terminowe, opcje oraz swapy.

2. Model Blacka-Scholesa i jego modyfikacje

2.1. Klasyczny model Blacka-Scholesa

Model Blacka-Scholesa jest matematycznym modelem rynku, który opisuje dynamikę cen instrumentów finansowych w czasie, służy do wyceny instrumentów pochodnych [Black, Scholes, 1973; Weron, Weron, 1998; Steele, 2001; Oksendal, 2003; Shreve, 2004; Kaufman, 2005; Mastalerz-Kodzis, 2011].

Celem modelu jest minimalizacja strat związanych z chybionymi transakcjami kupna i sprzedaży na giełdzie. Model wyceny opcji pozwala określić zmienność ceny na podstawie danych historycznych lub na podstawie cen opcji, umożliwia efektywne zarządzanie ryzykiem.

Model posiada liczne założenia teoretyczne, m.in. zakłada się, że: rynek działa w sposób ciągły, krótkoterminowa wolna od ryzyka stopa procentowa nie zmienia się w okresie ważności opcji, stopy zwrotu mają rozkład logarytmiczno-normalny ze stałymi parametrami, akcje są nieskończenie podzielne, ceny kupna i sprzedaży są takie same, akcje nie dają dywidend w okresie ważności opcji, nie jest uwzględniony koszt transakcji, nie uwzględnia się podatków oraz nie ma arbitrażu.

Model jest bliski rzeczywistości, tzn. ceny opcji uzyskane przy jego zastosowaniu są bliskie rzeczywistym cenom rynkowym. Analizując postać równań modelu, można wysunąć następujące wnioski: wzrost ceny akcji pociąga za sobą wzrost ceny opcji, im dłuższy czas do wygaśnięcia opcji, tym wyższa wartość opcji, wzrost stopy procentowej powoduje wzrost wartości opcji oraz odchylenie standardowe mierzy ryzyko instrumentu bazowego, jego wzrost powoduje wzrost ceny opcji.

Cena Blacka-Scholesa europejskiej opcji kupna na instrument bazowy wyrażona jest wzorem:

$$C_t = S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \tag{1}$$

gdzie:
S_t – cena instrumentu bazowego w chwili t,
K – cena wykonania opcji,
$(T-t)$ – termin wygaśnięcia opcji (liczony w latach),
R – stopa procentowa (w skali roku),
σ – zmienność cen instrumentu bazowego,
$\Phi(\cdot)$ – dystrybuanta standardowego rozkładu normalnego,

oraz $d_1 = \dfrac{\ln\dfrac{S_t}{K} + \left(r + \dfrac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$, $d_2 = \dfrac{\ln\dfrac{S_t}{K} + \left(r - \dfrac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$.

Cena Blacka-Scholesa europejskiej opcji sprzedaży na instrument bazowy wyrażona jest wzorem:

$$P_t = -S_t\Phi(-d_1) + Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) \tag{2}$$

przy oznaczeniach jak wyżej.

Opisany model stał się podstawą licznych prac z zakresu inżynierii finansowej. Założenia modelu nie zawsze w praktyce są spełnione, zatem istnieje konieczność z jednej strony specyfikacji modelu, z drugiej zaś jego ciągłego dopasowywania do zmieniającego się rynku finansowego.

2.2. Modyfikacja modelu Blacka-Scholesa z wykorzystaniem wykładnika Hursta

Liczne analizy empiryczne zachowania się szeregów czasowych cen instrumentów giełdowych spowodowały, że współcześnie znaczenie oryginalnego wzoru Blacka-Scholesa jest nieco mniejsze. W literaturze z dziedzin finansów i ekonomii zaznaczono następujące własności giełdowych stóp zwrotów: istnieje korelacja pomiędzy kolejnymi wartościami szeregów giełdowych, istnieje pamięć w finansowych szeregach czasowych, długoterminowa zależność oraz stopy zwrotu posiadają rozkład leptokurtyczny, który ma wyższe maksimum i cięższe (grubsze) ogony niż rozkład Gaussa.

C.C. Heyde i N.N. Leonenko [2005] zaproponowali model cen akcji wykorzystujący geometryczny ruch Browna z fraktalnym zachowaniem czasu. Opisano w nim cenę akcji za pomocą stochastycznego równania różniczkowego:

$$dP_t = P_t\{\mu\, dt + \sigma\, dW(T_t)\} \tag{3}$$

gdzie: μ oraz σ są stałymi, zaś W jest standardowym ruchem Browna.

Heyde i Leonenko przyjęli założenie, że proces stochastyczny T_t : ≥ 0 posiada stacjonarne przyrosty oraz grube ogony. Można go aproksymować procesami, które posiadają własność asymptotycznego samopodobieństwa.

Wzór wyceny europejskiej opcji kupna ma wówczas postać:

$$C_t = S_0\Phi(d_3) - Ke^{-rT_t}\Phi(d_4) \tag{4}$$

natomiast cena europejskiej opcji sprzedaży wyraża się wzorem:

$$P_t = -S_0\Phi(-d_3) + Ke^{-rT_t}\Phi(-d_4) \tag{5}$$

dla $d_3 = \dfrac{\ln\dfrac{S_0}{K} + \left(r + \dfrac{\sigma^2}{2}\right)T_t}{\sigma\sqrt{T_t}}$, $d_4 = \dfrac{\ln\dfrac{S_0}{K} + \left(r - \dfrac{\sigma^2}{2}\right)T_t}{\sigma\sqrt{T_t}}$, pozostałe oznaczenia tj. we wzorze (1).

Porównując wzory, można zauważyć, że w klasycznej formule Blacka-Scholesa (1)-(2) występuje proces ceny instrumentu podstawowego $\{S_t\}$ oraz czas pozostały do wygaśnięcia opcji $(T - t)$. Natomiast wzory (4)-(5) zawierają S_0 – cenę instrumentu podstawowego w chwili 0. Oznacza to, że aby dokonać wyceny, nie musimy znać całego przebiegu ceny instrumentu podstawowego. Proces stochastyczny T_t, który jest procesem o przyrostach stacjonarnych oraz skończenie wymiarowym rozkładzie o tzw. grubych ogonach, można przybliżać za pomocą rozkładu zmiennej losowej $t + t^H(T_1 - 1)$, gdzie H jest wykładnikiem Hursta [Weron, Weron, 1998; Mastalerz-Kodzis, 2003][1], a T_1 ma w przybliżeniu rozkład $RG\left(\frac{v}{2}, \frac{v-2}{2}\right)$ – odwrotny rozkład Gamma o parametrach $\frac{v}{2}, \frac{v-2}{2}$ dla $v > 4$.

3. Zastosowanie funkcji Höldera do wyceny opcji

W modelu Blacka-Scholesa zakłada się, że stopy zwrotu mają rozkład logarytmiczno-normalny ze stałymi parametrami. Model Heyde'a i Leonenki zakłada, że proces posiada stacjonarne przyrosty oraz grube ogony. Można wykazać, że istnieje wiele procesów na rynku finansowym, które nie posiadają przyrostów stacjonarnych. Wówczas jednym z możliwych narzędzi służących do modelowania tego typu procesów są multiułamkowe procesy ruchów Browna, w których za zmienność procesu odpowiada funkcja Höldera.

3.1. Funkcja Höldera

Niech będzie dana funkcja $f : D \to \Re$ $(D \subset \Re)$ oraz parametr $\alpha \in (0,1)$. Funkcja $f : D \to \Re$ jest funkcją klasy C^α Höldera $(f \in C^\alpha)$, jeżeli istnieją stałe $c > 0$ oraz $h_0 > 0$ takie, że dla każdego x oraz wszystkich h takich, że $0 < h < h_0$ spełniona jest nierówność [Peltier, Lévy Véhel, 1995; Daoudi, Lévy Véhel, Meyer, 1998; Mastalerz-Kodzis, 2003, 2013]:

[1] Wykładnik Hursta należy do przedziału [0,1] i dzieli szeregi o przyrostach stacjonarnych na: persystentne – o dodanej korelacji pomiędzy kolejnymi realizacjami [0, 1/2) i antypersystentne, w których korelacja jest ujemna (1/2,0].

$$| f(x+h) - f(x) | \le c\, h^{\alpha} \tag{6}$$

Niech x_0 będzie dowolnym punktem z dziedziny funkcji f ($x_0 \in D \subset \Re$). Funkcja $f : D \to \Re$ jest w punkcie x_0 funkcją klasy $C_{x_0}^{\alpha}$ Höldera $\left(f \in C_{x_0}^{\alpha}\right)$, jeżeli istnieją stałe ε, $c > 0$ takie, że dla każdego $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ spełniona jest nierówność:

$$| f(x) - f(x_0) | \le c\, | x - x_0 |^{\alpha} \tag{7}$$

Punktowym wykładnikiem Höldera funkcji f w punkcie x_0 nazywamy liczbę $\alpha_f(x_0)$ daną wzorem $\alpha_f(x_0) = \sup\left\{ \alpha : f \in C_{x_0}^{\alpha} \right\}$. Funkcją Höldera dla funkcji f nazywamy funkcję, która każdemu punktowi $x \in D$ przyporządkowuje liczbę $\alpha_f(x)$.

Procesy o przyrostach stacjonarnych mogą być modelowane za pomocą ułamkowego ruchu Browna. Są ona zależne od stałego parametru – wykładnika Hursta. Procesy o przyrostach stacjonarnych i niestacjonarnych można modelować za pomocą multiułamkowego procesu ruchu Browna – realizacje procesów są wówczas zależne od funkcji Höldera.

3.2. Multiułamkowy proces ruchu Browna i estymacja funkcji Höldera

Procesy ułamkowe są szczególnym przypadkiem multiułamkowych, stała wartość funkcji Höldera to wykładnik Hursta. Niech $H_t : [0,\infty) \to (0,1)$ będzie funkcją Höldera o wykładniku $\alpha > 0$. Uogólnionym multiułamkowym procesem ruchu Browna z parametrem funkcyjnym $H(t)$ i λ – liczbą rzeczywistą nazywamy proces $\left\{B_{H,\lambda}(t)\right\}_{t \in R}$ taki, że dla każdego $t \in R$:

$$B_{H,\lambda}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{D_n} \frac{e^{it\xi} - 1}{|\xi|^{H_n(t)+0,5}} dB(\xi) \tag{8}$$

gdzie $D_0 = \left\{\xi : |\xi| < 1\right\}$, dla wszystkich $n \ge 1$, $D_n = \left\{\xi : \ \lambda^{n-1} \le |\xi| < \lambda^n \right\}$.

Dla procesu ruchu Browna $\left\{B_{i,n} = B_H\left(\tfrac{i}{n}\right), \quad 0 \le i \le n\right\}$ estymator ma postać:

$$\hat{H}_{i/(n-1)} = -\frac{\log\left(\sqrt{\pi/2}\, S_{k,n}(i)\right)}{\log(n-1)} \tag{9}$$

dla $S_{k,n}(i) = \dfrac{m}{n-1} \sum_{j=i-k/2}^{i+k/2} \left| B_{j+1,n} - B_{j,n} \right|$ i dla t z przedziału [$k/n, 1 - (k/n)$].

W przypadku analizy empirycznej, z uwagi na uwzględnienie efektu pamięci w szeregach, należy brać pod uwagę długie szeregi czasowe. Im obserwacje są bardziej odległe w czasie, tym mają mniejszy wpływ na wartości bieżące szeregów i na poziom ryzyka. Wyestymowane wartości funkcji Höldera mogą być interpretowane jako miary ryzyka, wyznaczają prawdopodobieństwo zmiany kierunku.

3.3. Uwagi o zastosowaniu funkcji Höldera jako miary zmienności w modelu Blacka-Scholesa

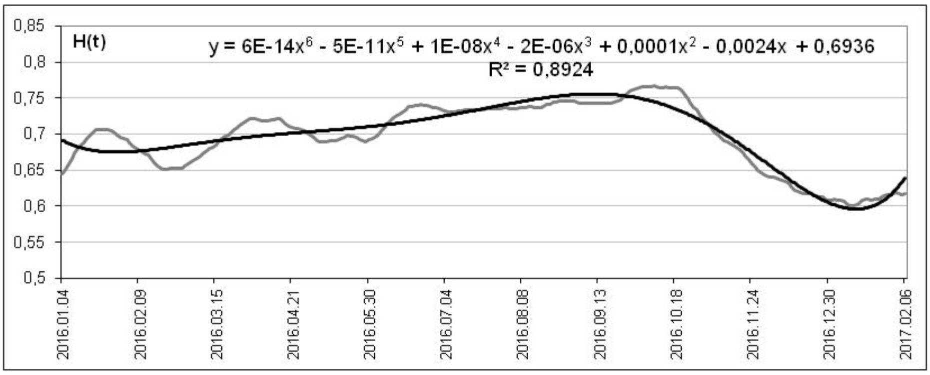
W formule Blacka-Scholesa występuje proces stochastyczny T_t, który jest procesem o przyrostach stacjonarnych oraz skończenie wymiarowym rozkładzie o tzw. grubych ogonach. Heyde i Leonenko wykazali, że proces ten można przybliżać za pomocą rozkładu zmiennej losowej $t + t^H(T_1 - 1)$, gdzie H jest wykładnikiem Hursta (stałym dla całego procesu). Jednakże liczne badania empiryczne potwierdzają, że procesy giełdowe nie posiadają przyrostów stacjonarnych. Wówczas stały w czasie wykładnik Hursta należy zastąpić zmieniającą się w czasie funkcją Höldera. Zatem zamiast stałej wartości H, należałoby posłużyć się wyestymowanymi punktowymi wykładnikami Höldera [Peltier, Lévy Véhel, 1995; Daoudi, Lévy Véhel, Meyer, 1998; Mastalerz-Kodzis, 2003] dla danych historycznych oraz ich aproksymantami dla danych aktualnych oraz dla wyznaczania prognoz.

4. Analiza empiryczna dla WIG 20 i opcji kupna na WIG20

Badania empiryczne zostały przeprowadzone na podstawie notowań indeksu WIG20 oraz opcji kupna na WIG20 o numerze OW20D171600 (termin wykupu: 21.04.2017 r.). Okres analiz obejmuje notowania WIG20 od 4.01.2016 r. do 24.03.2017 r., zaś w przypadku opcji kupna okres 6.02.2017-24.03.2017 r. [www 1; www 2].

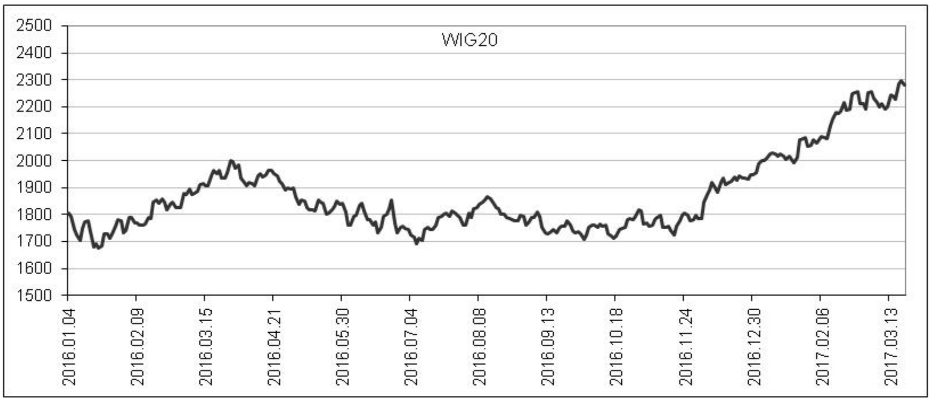
Na rysunku 1 przedstawiono wartości indeksu WIG20 w okresie 4.01.2016-20.03.2017 r. Dla szeregu WIG20 na potrzeby specyfikacji parametrów modelu Heyde'a i Leonenki wyznaczono w Programie GRETL wykładnik Hursta. Na podstawie analizy przeskalowanego zakresu ustalono wielkość wykładnika Hursta[2] równą 0,57. Wszelkie obliczenia, mające na celu przybliżenie procesu T_t, zostały wykonane w arkuszu kalkulacyjnym MS Excel.

[2] Gdy szereg nie ma przyrostów stacjonarnych, nie powinno się wyznaczać wykładnika Hursta. Jednak wykonano obliczenia w celu porównania efektywności uzyskanych rozwiązań optymalnych.



Rys. 1. Notowania WIG20 – dane empiryczne w okresie 4.01.2016-20.03.2017 r.

Następnie wyestymowano funkcję Höldera dla szeregu WIG20. Rysunek 2 przedstawia wyestymowane punktowe wykładniki Höldera za okres 4.01.2016-20.03.2017 r. oraz aproksymantę najlepiej dopasowaną do wykładników.

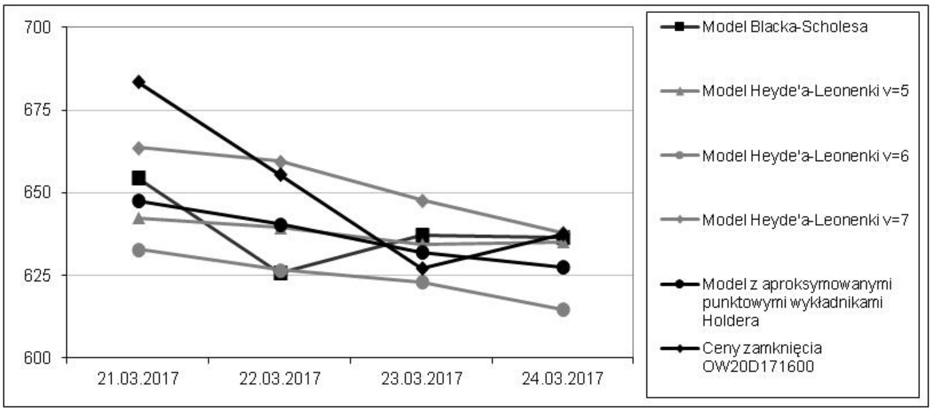


Rys. 2. Wyestymowane punktowe wykładniki Höldera dla danych WIG20 w okresie 2.01.2017-20.03.2017 r. wraz z aproksymantą wielomianową

Traktując dane dla indeksu WIG20 jako szereg czasowy okazało się, że nie jest to szereg o przyrostach stacjonarnych[3]. Wartości funkcji Höldera w badanym okresie zmienią się pod wpływem czasu i należą do przedziału (0,6; 0,77). Stała wartość wykładnika Hursta jest równa 0,57. Świadczy to o istnieniu efektu pamięci w szeregu danych giełdowych indeksu WIG20. Rynek zatem nie jest efektywny, wartości indeksu nie odzwierciedlają wszystkich dostępnych informacji, które dostały się na rynek.

[3] Wyestymowane punktowe wykładniki Höldera zależą od długości przedziału estymacji, które bierze się do analiz [Mastalerz-Kodzis, 2003].

Wyznaczono ceny opcji kupna za pomocą klasycznej formuły Blacka-Scholesa, dla formuły Heyde'a i Leonenki oraz posługując się wyestymowanymi wykładnikami Höldera. Na rysunku 3 zamieszczono wyniki obliczeń – porównanie cen teoretycznych opcji w dniach 21-24.03.2017 r.



Rys. 3. Ceny zamknięcia opcji kupna OW20D171600 w dniach 21-24.03.2017 r. oraz teoretyczne ceny opcji uzyskane za pomocą modelu Blacka-Scholesa i jego modyfikacji

Z przeprowadzonych analiz można wysunąć następujące wnioski:

1. W klasycznym modelu Blacka-Scholesa (1) znajomość wartości instrumentu bazowego w chwili t jest konieczna. Pozwala to na precyzyjne wyznaczanie teoretycznej ceny instrumentu pochodnego w momencie czasowym t;
2. Modyfikacja Heyde'a i Leonenki (4) pozwala na wyznaczenie ceny opcji kupna na WIG20 bez potrzeby znajomości wartości instrumentu bazowego w chwili t. Do obliczeń wystarczy znajomość wartości instrumentu podstawowego w chwili $t = 0$ oraz wartości wykładnika Hursta. Zakłada się bowiem istnienie efektu pamięci w szeregu czasowym instrumentu bazowego. Model Heyde'a i Leonenki jest zależny jednak od procesu stochastycznego T_t oraz od parametru odwrotnego rozkładu Gaussa (parametru v). Można także zapisać, że najlepsze dopasowanie występuje dla wartości parametru v równe; 5.
3. Można stwierdzić, że zaproponowane uogólnienie modelu Blacka-Scholesa, polegające na uwzględnieniu efektu długiej pamięci w postaci zastosowania wykładnika Hursta, pozwala na skuteczne modelowanie i efektywne zarządzanie ryzykiem inwestycyjnym.
4. Aproksymacja wyestymowanych, punktowych wykładników Höldera i wstawienie ich zamiast stałego w czasie wykładnika Hursta do modelu Blacka-Scholesa pozwoliły na uzyskanie zbliżonych rozwiązań. Jednakże konieczna jest dalsza analiza własności zaproponowanej modyfikacji modelu,

bowiem omawiany model nie posiada już przyrostów stacjonarnych (punktowe wykładniki Höldera zmieniają się pod wpływem czasu, ich zmienność jest taka, jak zmienności instrumentu bazowego).

Podsumowanie

W pracy krótko omówiono klasyczny model Blacka-Scholesa z 1973 r. oraz jego wybrane modyfikacje. Skupiono się na wersjach modelu wykorzystujących istnienie efektu pamięci. Zaprezentowano uogólnienie modelu Blacka-Scholesa zaproponowane przez Heyde'a i Leonenkę z 2005 r., przeprowadzono specyfikacje parametrów modelu dla danych z GPW w Warszawie. Omówiono możliwość zastosowania wyestymowanych punktowych wykładników Höldera do wyceny opcji.

Modyfikacje modelu Blacka-Scholesa umożlwiają wykonanie precyzyjnego opisu instrumentów finansowych. Naukowcy oraz praktycy giełdowi są zainteresowani problemem wyceny walorów giełdowych celem osiągania korzyści finansowych oraz w celu zapobiegania stratom. Uwzględnienie efektu pamięci w finansowych szeregach czasowych oraz ich niestacjonarności w konstrukcji modelu wyceny stanowi istotny element wpływający na efektywność omawianych modeli.

Literatura

Black F., Scholes M. (1973), *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, "Journal of Political Economy", No. 81, s. 637-654.

Crawford G., Sen B. (1998), *Instrumenty pochodne. Narzędzie podejmowania decyzji finansowych*, K.E. Liber, Warszawa.

Daoudi K., Lévy Véhel J., Meyer Y. (1998), *Construction of Continuous Functions with Prescribed Local Regularity*, "Journal of Constructive Approximations", Vol. 14(3), s. 349-385.

Heyde C.C., Leonenko N.N. (2005), *Student Processes*, "Advancess in Applied Probability", Vol. 37, No. 2, s. 342-365.

Jajuga K., Jajuga T. (2015), *Inwestycje. Instrumenty finansowe, aktywa niefinansowe, ryzyko finansowe, inżynieria finansowa*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Kaufman P. (2005), *New Trading Systems and Methods*, John Wiley&Sons, New York.

Marciniak Z. (2001), *Zarządzanie wartością i ryzykiem przy wykorzystaniu instrumentów pochodnych*, SGH, Warszawa.

Mastalerz-Kodzis A. (2003), *Modelowanie procesów na rynku kapitałowym za pomocą multifraktali*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej im. Karola Adamieckiego w Katowicach, Katowice.

Mastalerz-Kodzis A. (2011), *Wykorzystanie strategii zabezpieczających w zarządzaniu portfelem inwestycji kapitałowych* [w:] A. Janiga-Ćmiel, A. Mastalerz-Kodzis, J. Mika, E. Pośpiech, M. Trzęsiok, J. Trzęsiok (red.), *Metody i modele analiz ilościowych w ekonomii i zarządzaniu*, cz. 3, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach, s. 58-81.

Mastalerz-Kodzis A. (2013), *Zastosowanie funkcji Höldera w modelu FRAMA*, „Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach", nr 159, s. 73-81.

Oksendal B. (2003), *Stochastic Differential Equations*, Springer, New York.

Peltier R.F., Lévy Véhel J. (1995), *Multifractional Brownian Motion: Definition and Preliminary Results*, INRIA Recquencourt, Rapport de recherché, No. 2645.

Shreve S. (2004), *Stochastic Calculus for Finance*, Continuous-Time Models, Springer, New York.

Steele J.M. (2001), *Stochastic Calculus and Financial Applications*, Springer, New York.

Weron A., Weron R. (1998), *Inżynieria Finansowa*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.

[www 1] www.gpw.pl (dostęp: 26.03.2017).

[www 2] www.bossa.pl (dostęp: 26.03.2017).

THE APPLICATION OF HURST EXPONENT AND HÖLDER FUNCTION IN BLACK-SCHOLES MODEL

Summary: In the article we have presented the modification of a classic Black-Scholes model. We have considered the existence of memory effect in financial time series and introduced valuations of financial instruments, Hurst exponent and Hölder function into the model. The article consists of the theoretical part, in which we have presented the assumptions and the theoretical form of a classic Black-Scholes model and discussed its selected modifications, as well as the application part, which illustrates the effectiveness of the obtained solutions.

Keywords: stochastic process, Black-Scholes model, derivative instruments, Hurst exponent, Hölder function.