



Joanna Szkutnik-Rogoż

Wojskowa Akademia Techniczna
Wydział Mechaniczny
jskutnik@onet.eu

Jarosław Ziółkowski

Wojskowa Akademia Techniczna
Wydział Mechaniczny
jaroslaw.ziolkowski@wat.edu.pl

ZARZĄDZANIE TRANSPORTEM SAMOCHODOWYM Z UWZGLĘDNIENIEM ANALIZY KOSZTÓW

Streszczenie: Zagadnienie transportowe jest szczególnym rodzajem programowania liniowego. Polega na zaplanowaniu przemieszczania towarów od dostawców do odbiorców w taki sposób, aby łączne koszty transportu były najmniejsze. Aby zadanie miało rozwiązanie dopuszczalne, łączna podaż musi zaspokoić zagregowany popyt. Duża efektywność algorytmu transportowego jest główną przyczyną jego zastosowań. Zaprezentowanie problemu transportowego z matematycznego punktu widzenia polega na sformułowaniu celu działania jako funkcji zmiennych decyzyjnych. Na podstawie rozpatrywanej sytuacji decyzyjnej należy wskazać warunki ograniczające oraz sformułować je w postaci równań. W artykule założono określoną sieć dystrybucji, dla której przeprowadzono obliczenia czterema wybranymi metodami, tj. kąta północno-zachodniego, najmniejszego elementu w macierzy, najmniejszego elementu w wierszu oraz VAM z wykorzystaniem programu Octave 3.4.3. W efekcie uzyskano optymalne rozwiązanie końcowe.

Słowa kluczowe: zarządzanie, transport, koszty, analiza.

JEL Classification: C61, D30.

Wprowadzenie

Działalność transportowa stanowi filar współczesnej gospodarki, co znajduje swoje odzwierciedlenie w tworzeniu wartości dodanej w strukturze PKB danego kraju. Dokonując analizy struktury kosztów procesów logistycznych, należy zauważyć, że wydatki związane z transportem stanowią z reguły największą ich część [Demińska-Cyran, Gubała, 2005]. Szczególnym przypadkiem programowania liniowego jest zagadnienie transportowe polegające na dostarczaniu towaru od dostawcy do odbiorcy w sposób zapewniający minimalizację łącznych

kosztów przy założeniu względnej równowagi pomiędzy podażą a popytem [Stadnicki, 2006]. Rozwiązanie problemu optymalizacji polega na ukazaniu celu działania jako funkcji zmiennych decyzyjnych, wskazaniu warunków ograniczających [Grabowski, 1980] i stanowi ono jednocześnie filar zarządzania współczesną flotą środków transportu. Z transportem jest związany proces transportowy będący ciągiem czynności, w rezultacie których ładunek zostaje przemieszczony od dostawcy do odbiorcy [Krawczyk, 2011].

1. Zbilansowane zagadnienia transportowe

Zbilansowane zadanie transportowe odnosi się do stanu równowagi pomiędzy zagregowanym popytem a zagregowaną podażą [Cygan, 1978]. Znane jest zatem zapotrzebowanie w ramach sieci dystrybucji pomiędzy zleceniodawcą a zleceniobiorcą. Dystrybucję produktu należy zaplanować tak, aby łączny koszt transportu był minimalny [Jacyna, 2009]. Do rozwiązania zbilansowanego zagadnienia transportowego przyjęto następujące oznaczenia:

a_i – zasób i -tego dostawcy, $a_i > 0, i = 1, \dots, m$,

b_j – zapotrzebowanie j -tego odbiorcy, $b_j > 0, j = 1, \dots, n$,

c_{ij} – jednostkowy koszt transportu na trasie od i -tego dostawcy do j -tego odbiorcy, $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$.

Funkcja celu przyjmuje postać $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$ przy następujących warunkach:

runkach:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \text{ gdzie } i = 1, \dots, m \text{ oraz } \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \text{ gdzie } j = 1, \dots, n,$$

$x_{ij} \geq 0$ – wielkość przewozu na trasie od i -tego dostawcy do j -tego odbiorcy.

Z przyjętych założeń wynika, że $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$ [Gruszczyński, Kuszewski

i Podgórska, 2009]. Zbilansowane zagadnienie transportowe rozwiązano iteracyjnie z zastosowaniem czterech znanych metod postępowania: kąta północno-zachodniego, najmniejszego elementu w macierzy, najmniejszego elementu w wierszu oraz VAM.

2. Metoda kąta północno-zachodniego

Metoda kąta północno-zachodniego jest najprostszym środkiem do otrzymania początkowego rozwiązania bazowego. Polega na kolejnym przyporządk-

kowywaniu zmiennym odpowiednich wartości, każdorazowo dla tych tras, które znajdują się w lewym górnym rogu tabeli przewozów [Cyplik, Głowacka-Fertsch, Fertsch, 2008].

Wybrany przykład przedstawia trzech dostawców oznaczonych jako P_1 , P_2 , P_3 , którzy dostarczają produkt jednorodny gatunkowo do czterech odbiorców S_1 , S_2 , S_3 , S_4 . Plan przewozowy należy zaprojektować w taki sposób, aby koszty jego przewozu były minimalne [Anholcer, 2012]. Dane dotyczące popytu, podaży oraz kosztów przewozu jednostki towaru pomiędzy dostawcami i odbiorcami zaprezentowano w tabeli 1.

Tabela 1. Tabela przewozów w rozpatrywanej sieci dystrybucji

	P_1	P_2	P_3	POPYT
S_1	4	8	11	60
S_2	6	14	5	70
S_3	11	12	6	90
S_4	9	7	13	80
PODAŻ	100	120	80	300
				300

Źródło: Opracowanie własne.

Zadanie transportowe jest całkowicie określone przez liczbę dostawców m oraz liczbę odbiorców n . Liczba wszystkich zmiennych decyzyjnych wynosi $m \times n$, natomiast liczba warunków ograniczających wynosi $m + n$. W warunkach ograniczających zmienne decyzyjne występują ze współczynnikiem równym 0 lub 1.

Warunki ograniczające można zapisać w następujący sposób:

$$\begin{array}{l}
 x_{11} + x_{12} + x_{13} = 60 \\
 x_{21} + x_{22} + x_{23} = 70 \\
 x_{31} + x_{32} + x_{33} = 90 \\
 x_{41} + x_{42} + x_{43} = 80
 \end{array}
 \quad \text{oraz} \quad
 \begin{array}{l}
 x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 100 \\
 x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 120 \\
 x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 80
 \end{array}$$

Programowanie matematyczne może być podstawą wielu algorytmów obliczeniowych w zagadnieniach optymalizacyjnych [Sysło, Deo, Kowalik, 1993]. W oknie dialogowym programu Octave 3.4.3 należy wywołać arkusz o nazwie „PT”. Program Octave 3.4.3 wymaga wprowadzenia liczby dostawców i odbiorców. Następnie konieczne jest uzupełnienie wartości liczbowych dotyczących kosztów transportu od poszczególnych dostawców do odbiorców. Ponadto zostaje wyświetlony komunikat o konieczności wprowadzenia wartości podaży i popytu. Rezultat działania programu Octave 3.4.3 zaprezentowano na rys. 1.

```

Octave3.4.3
octave:1> PI
PROGRAMOWANIE LINIOWE - ROZWIĄZANIE PROBLEMU TRANSPORTOWEGO
Problem transportowy można rozwiązać za pomocą metod:
<A> metoda kąta północno-zachodniego,
<B> metoda najmniejszego elementu,
<C> metoda UAM.
Podaj liczbę dostawców, n = 3
Podaj liczbę odbiorców, n = 4
Potrzebujemy macierz kosztów transportu <c> pomiędzy 3 dostawcami a 4 odbiorcami

Podaj koszt transportu od dostawcy P1 do odbiorcy S1, c<1,1> = 4
Podaj koszt transportu od dostawcy P2 do odbiorcy S1, c<1,2> = 8
Podaj koszt transportu od dostawcy P3 do odbiorcy S1, c<1,3> = 11
Podaj koszt transportu od dostawcy P1 do odbiorcy S2, c<2,1> = 6
Podaj koszt transportu od dostawcy P2 do odbiorcy S2, c<2,2> = 14
Podaj koszt transportu od dostawcy P3 do odbiorcy S2, c<2,3> = 5
Podaj koszt transportu od dostawcy P1 do odbiorcy S3, c<3,1> = 11
Podaj koszt transportu od dostawcy P2 do odbiorcy S3, c<3,2> = 12
Podaj koszt transportu od dostawcy P3 do odbiorcy S3, c<3,3> = 6
Podaj koszt transportu od dostawcy P1 do odbiorcy S4, c<4,1> = 9
Podaj koszt transportu od dostawcy P2 do odbiorcy S4, c<4,2> = 7
Podaj koszt transportu od dostawcy P3 do odbiorcy S4, c<4,3> = 13
Podaj liczbę towarów do dostarczenia przez dostawcę P1, podaż<1> = 100
Podaj liczbę towarów do dostarczenia przez dostawcę P2, podaż<2> = 120
Podaj liczbę towarów do dostarczenia przez dostawcę P3, podaż<3> = 80
Podaj liczbę towarów do odebrania przez odbiorcę S1, popyt<1> = 60
Podaj liczbę towarów do odebrania przez odbiorcę S2, popyt<2> = 70
Podaj liczbę towarów do odebrania przez odbiorcę S3, popyt<3> = 90
Podaj liczbę towarów do odebrania przez odbiorcę S4, popyt<4> = 80

```

Rys. 1. Dane liczbowe wprowadzone do programu Octave 3.4.3

Źródło: Opracowanie własne.

Po uzupełnieniu danych wejściowych wyświetlono macierz kosztów o wymiarach $m \times n$ oraz tabelę na wyniki. Rezultat działania programu Octave 3.4.3 zobrazowano na rys. 2.

```

Octave3.4.3
: 100 : 120 : 80
: P1 : P2 : P3
: 4 : 8 : 11 : S1 : 60
: 6 : 14 : 5 : S2 : 70
: 11 : 12 : 6 : S3 : 90
: 9 : 7 : 13 : S4 : 80

Tabela na wyniki
: 100 : 120 : 80
: x : x : x : 60
: x : x : x : 70
: x : x : x : 90
: x : x : x : 80

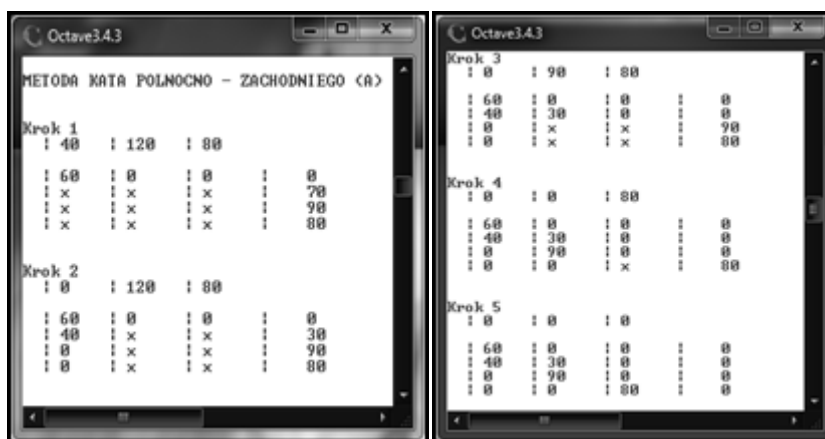
```

Rys. 2. Macierz kosztów oraz tabela na wyniki

Źródło: Opracowanie własne.

Program Octave 3.4.3 dokonuje porównania wartości popytu i podaży dla pierwszej komórki lewego narożnika, po czym wybiera mniejszą spośród nich i wpisuje w pierwszą pustą komórkę. Jednocześnie odejmuje wpisaną wartość od

podaży i popytu oraz sprawdza, która z nich osiąga wartość zero. Wyniki obliczeń zilustrowano na rys. 3.



Rys. 3. Wynik działania programu dla metody kąta północno-zachodniego

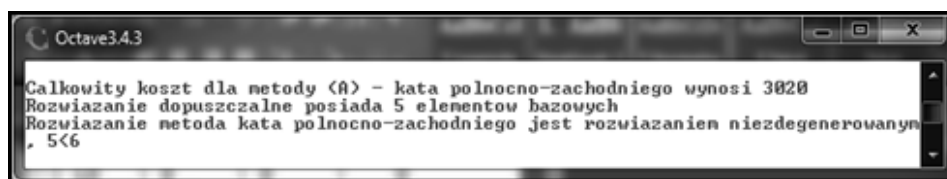
Źródło: Opracowanie własne.

Aby rozwiązanie było zdegenerowane, elementów bazowych powinno być $m+n-1$, a zatem otrzymane rozwiązanie nie jest zdegenerowane. W celu wyznaczenia kosztów transportu metodą kąta północno-zachodniego obliczono sumę iloczynów elementów bazowych i odpowiadających im kosztów transportu. Funkcja celu przyjmuje następującą postać:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} = x_{11} \times 4 + x_{21} \times 6 + x_{22} \times 14 + x_{32} \times 12 + x_{43} \times 13 =$$

$$= 60 \times 4 + 40 \times 6 + 30 \times 14 + 90 \times 12 + 80 \times 13 = 3020$$

W oknie dialogowym wyświetlono komunikat informujący o wartości funkcji celu, liczbie elementów bazowych oraz o zdegenerowaniu rozwiązania. Dla potwierdzenia przeprowadzonych obliczeń wyniki odzwierciedlono na rys. 4.

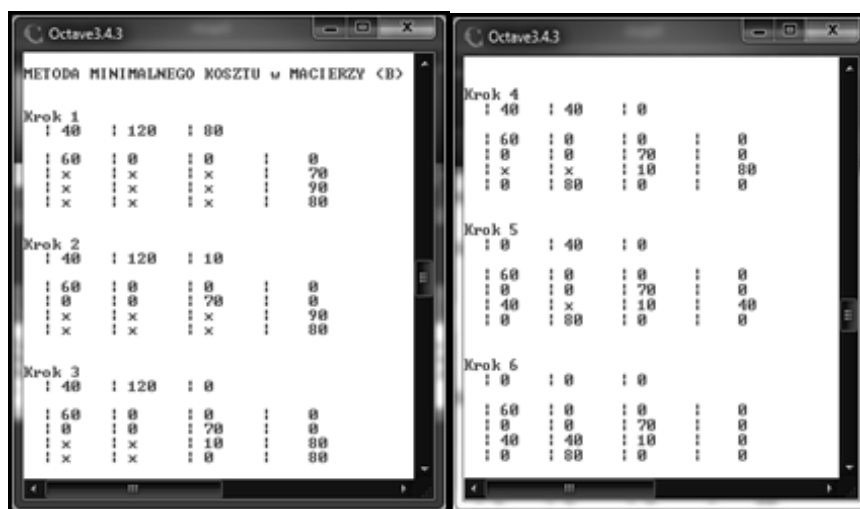


Rys. 4. Podsumowanie programu dla metody kąta północno-zachodniego

Źródło: Opracowanie własne.

3. Metoda najmniejszego elementu w macierzy

Istotą tej metody jest wypełnienie tabeli tras o najniższych kosztach jednostkowych w kolejności według niemalejącego ciągu wartości jednostkowych kosztów transportu. Program Octave 3.4.3 dokonuje analizy wszystkich wartości kosztów oraz wyznacza najmniejszą spośród nich. Następnie o wskazaną wartość pomniejsza popyt oraz podaż na dany produkt. Działanie programu Octave 3.4.3 metodą najmniejszego elementu kosztu w macierzy zaprezentowano na rys. 5.



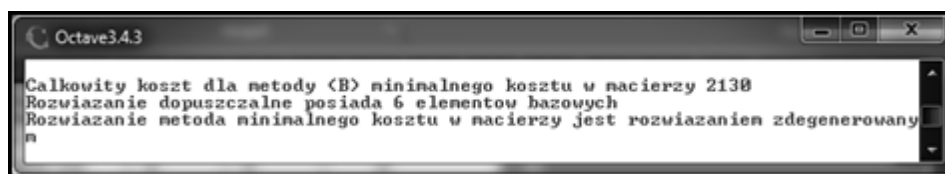
Rys. 5. Wynik działania programu dla metody najmniejszego elementu w macierzy

Źródło: Opracowanie własne.

Otrzymano rozwiązanie dopuszczalne, które jest rozwiązaniem zdegenerowanym. Funkcja celu przyjmuje następującą postać:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} &= x_{11} \times 4 + x_{31} \times 11 + x_{32} \times 12 + x_{42} \times 7 + x_{23} \times 5 + x_{33} \times 6 = \\ &= 60 \times 4 + 40 \times 11 + 40 \times 12 + 80 \times 7 + 70 \times 5 + 10 \times 6 = 2130 \end{aligned}$$

Koszt rozwiązania metodą najmniejszego elementu w macierzy wyniósł 2130 zł, co potwierdzono informacją wyświetloną w oknie dialogowym programu Octave 3.4.3 na rys. 6.

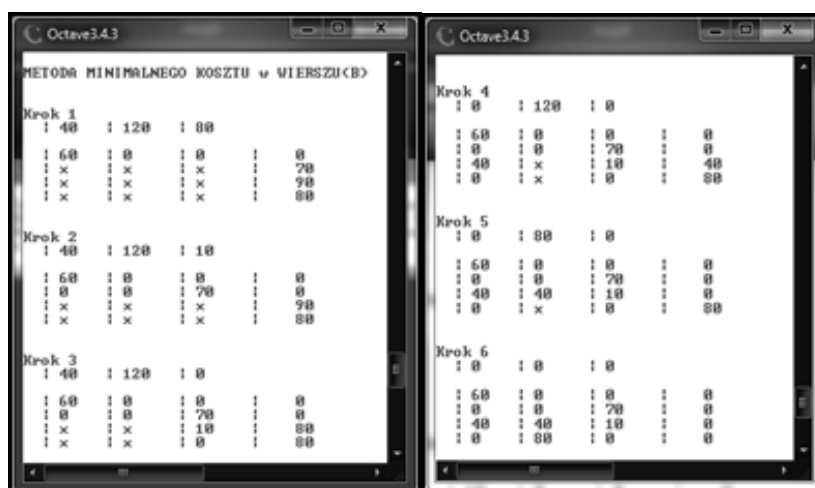


Rys. 6. Podsumowanie programu dla metody najmniejszego elementu w macierzy

Źródło: Opracowanie własne.

4. Metoda najmniejszego elementu w wierszu

W odniesieniu do metody najmniejszego elementu w wierszu program Octave 3.4.3 dokonuje porównania wartości kosztów transportu, rozpoczynając od pierwszego wiersza i jednocześnie wskazując mniejszą spośród odpowiadających jej wartości popytu i podaży, po czym o wpisaną wartość zmniejsza popyt i podaż, zaś pozostałe pola wypełnia zerami. Kolejne iteracje wykonano zgodnie z przedstawionym schematem oraz zobrazowano na rys. 7.



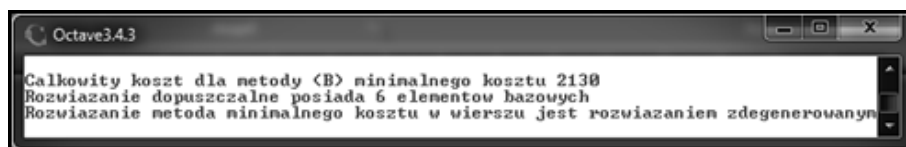
Rys. 7. Wynik działania programu dla metody najmniejszego elementu w wierszu

Źródło: Opracowanie własne.

Całkowity koszt rozwiązania obliczono zgodnie z zależnością:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} &= x_{11} \times 4 + x_{31} \times 11 + x_{32} \times 12 + x_{42} \times 7 + x_{23} \times 5 + x_{33} \times 6 = \\ &= 60 \times 4 + 40 \times 11 + 40 \times 12 + 80 \times 7 + 70 \times 5 + 10 \times 6 = 2130 \end{aligned}$$

Otrzymano rozwiązanie dopuszczalne, które jest rozwiązaniem zdegenerowanym. Koszt rozwiązania metodą najmniejszego elementu w wierszu wyniósł 2130 zł, co potwierdzono informacją wyświetloną w oknie dialogowym programu Octave 3.4.3 na rys. 8.



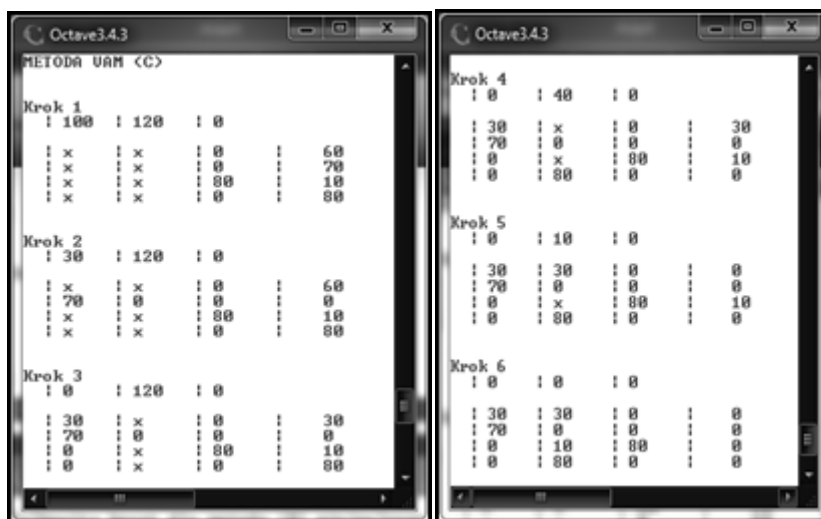
Rys. 8. Podsumowanie programu dla metody najmniejszego elementu w wierszu

Źródło: Opracowanie własne.

Na uwagę zasługuje fakt, iż metoda najmniejszego elementu kosztu w wierszu doprowadziła do uzyskania takiego samego rozwiązania, jak metoda najmniejszego elementu kosztu w macierzy.

5. Metoda VAM

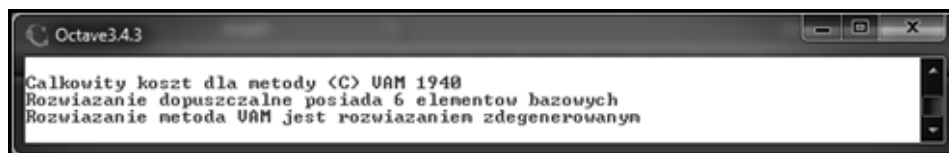
W metodzie VAM program Octave 3.4.3 w danym cyklu wskazuje różnicę pomiędzy najtańszą a drugą co do kosztu możliwością dostawy. Po wyznaczeniu różnic kosztowych kolejnym krokiem jest wyszukanie wiersza lub kolumny z różnicą o największej wartości. Efekt działania programu Octave 3.4.3 zaprezentowano na rys. 9.



Rys. 9. Wynik działania programu dla metody VAM

Źródło: Opracowanie własne.

Otrzymano rozwiązanie zdegenerowane, gdyż został spełniony warunek konieczny. Całkowity koszt transportu metodą VAM oszacowano na poziomie 1940 zł, co potwierdzono informacją wyświetloną na rys. 10.



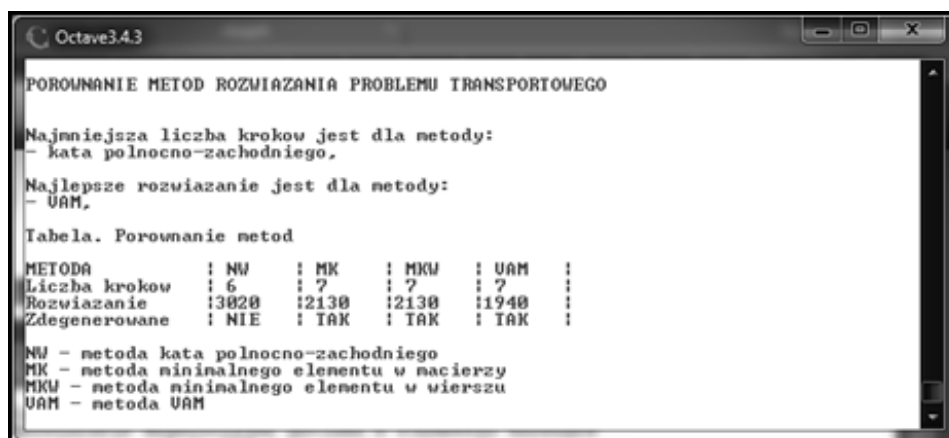
```

Octave3.4.3
-----
Całkowity koszt dla metody (C) UAM 1940
Rozwiązanie dopuszczalne posiada 6 elementów bazowych
Rozwiązanie metoda UAM jest rozwiązaniem zdegenerowanym
  
```

Rys. 10. Podsumowanie programu dla metody VAM

Źródło: Opracowanie własne.

Na rysunku 11 przedstawiono okno dialogowe wyświetlane jako podsumowanie działania programu Octave 3.4.3.



```

Octave3.4.3
-----
POROWNANIE METOD ROZWIĄZANIA PROBLEMU TRANSPORTOWEGO

Najmniejsza liczba kroków jest dla metody:
- kąta północno-zachodniego,

Najlepsze rozwiązanie jest dla metody:
- UAM,

Tabela. Porównanie metod
METODA      ! NW      ! MK      ! MKW     ! UAM     !
Liczba kroków ! 6       ! 7       ! 7       ! 7       !
Rozwiązanie   ! 3020    ! 2130    ! 2130    ! 1940    !
Zdegenerowane ! NIE     ! TAK     ! TAK     ! TAK     !

NW - metoda kąta północno-zachodniego
MK - metoda minimalnego elementu w macierzy
MKW - metoda minimalnego elementu w wierszu
UAM - metoda UAM
  
```

Rys. 11. Wynik końcowy wyświetlany w oknie dialogowym

Źródło: Opracowanie własne.

Porównując wyniki początkowych rozwiązań bazowych omawianego zbilansowanego zagadnienia transportowego, należy zauważyć, że wartości funkcji celu znacznie się różnią. Z przeprowadzonych obliczeń wynika, iż najwyższy koszt transportu otrzymano z zastosowaniem metody kąta północno-zachodniego. Należy zauważyć, że metoda najmniejszego elementu w wierszu i najmniejszego elementu w macierzy doprowadziła do uzyskania takiego samego rozwiązania. Warunek konieczny dotyczący zdegenerowania rozwiązania dopuszczalnego nie został spełniony jedynie w przypadku metody kąta północno-zachodniego. Najmniejszą wartość funkcji celu otrzymano, stosując metodę VAM.

Podsumowanie

Celem niniejszego artykułu było przedstawienie korzyści wynikających z zastosowania oprogramowania matematycznego Octave 3.4.3 do wybranych zagadnień zarządzania transportem samochodowym czterema wybranymi metodami, tj. kąta północno-zachodniego, najmniejszego elementu w macierzy, najmniejszego elementu w wierszu oraz VAM. W przypadku tej ostatniej metody uzyskano rozwiązanie optymalne, tj. otrzymano najmniejszą wartość funkcji celu.

W opracowaniu przedstawiono różne sposoby obliczania kosztów w zakresie środków transportu prowadzące do osiągnięcia minimalnej funkcji celu. Obecnie dostępnych jest coraz więcej narzędzi w znacznym stopniu ułatwiających wyznaczanie kosztów eksploatacji środków transportu. Z przeprowadzonych obliczeń wynika, iż zaprezentowany sposób praktycznego wykorzystywania programu Octave 3.4.3 z powodzeniem może być stosowany do rozwiązywania nawet najbardziej złożonych zagadnień dotyczących zarządzania transportem.

Literatura

- Anholcer M. (2012), *Algorithm for the Stochastic Generalized Transportation Problem*, Operations Research and Decisions.
- Cygan Z. (1978), *Podstawy ekonomiki transportu samochodowego w wojsku*, Wydawnictwo MON, Warszawa.
- Cyplik P., Głowacka-Fertsch D., Fertsch M. (2008), *Logistyka przedsiębiorstw dystrybucyjnych*, Wyższa Szkoła Logistyki, Poznań.
- Dembińska-Cyran I., Gubała M. (2005), *Podstawy zarządzania transportem w przykładach*, ILiM, Poznań.
- Grabowski W. (1980), *Programowanie matematyczne*, PWE, Warszawa.
- Gruszczyński M., Kuszewski T., Podgórska M. (2009), *Ekonometria i badania operacyjne*, PWN, Warszawa.
- Jacyna M. (2009), *Wybrane zagadnienia modelowania systemów transportowych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa.
- Krawczyk S. (2011), *Logistyka teoria i praktyka I*, Difin, Warszawa.
- Stadnicki J. (2006), *Teoria i praktyka rozwiązywania zadań optymalizacji z przykładami zastosowań technicznych*, WNT, Warszawa.
- Sysło M., Deo N., Kowalik J. (1993), *Algorytmy optymalizacji dyskretnej*, PWN, Warszawa.
- Szkutnik J., Ziółkowski J. (2015), *Optymalizacja kosztów transportu w sferze zaopatrzenia*, „Logistyka”, nr 4, Poznań.

**THE TRANSPORTATION MANAGEMENT
AND THE COST ANALYSIS**

Summary: The aim of this article was to present effectiveness of such methods as: north-west angle, the least element and VAM, gained by using the Octave 3.4.3 in setting a minimal value for the objective function in this transportation issue. The methods of practical usage of modern mathematical software helping to determine transportation costs were presented by means of these figures. Demonstration of the problem from mathematical point of view figures on formularize objective function as a function of decision variable and pointed of restrictive condition. The organic part of logistic system is transport. Making an analysis of costs structure in the logistic process, there is fundamental to notice that costs of transport are the main part of all spending. From calculation follows that the highest transport cost receive for north-west angle method. Furthermore, the least value of objective function was receive for the least element method and VAM. The conclusion of given analysis is that the effectiveness gained by using the Octave 3.4.3 can be used to solve the most complex transportation problem.

Keywords: management, transport, costs, analysis.