



Zbigniew Świtalski

Uniwersytet Zielonogórski
Wydział Matematyki, Informatyki i Ekonometrii
Zakład Ekonomii Matematycznej i Optymalizacji
z.switalski@wmie.uz.zgora.pl

Paweł Skalecki

pawel.skalecki@hotmail.com

GRY TRANSPORTOWE I PARADOKS BRAESSA

Streszczenie: Paradoks Braessa [1968] opisuje sieci transportowe (drogowe), w których dołączenie (wybudowanie) nowego odcinka może spowodować wydłużenie średniego czasu przejazdu przez taką sieć. W pracy wprowadzamy formalizmy matematyczne niezbędne do analizy paradoksów typu Braessa, a także przedstawiamy wyniki symulacji pokazujące, jak często w sieci rozważanej przez Braessa, z losowo wybieranymi funkcjami czasu, pojawiają się podobnego typu paradoksy. W symulacjach wykorzystywaliśmy nie tylko liniowe lub afiniczne funkcje czasu (których używał Braess), ale również funkcje sklepane (stałe dla pewnego przedziału intensywności ruchu).

Słowa kluczowe: Paradoks Braessa, sieć drogowa, gra transportowa, przepływ równowagi, przepływ optymalny.

JEL Classification: C44, C63, C72, R41.

Wprowadzenie

W swojej pracy Braess [1968] przedstawił przykład (teoretyczny) sieci transportowej, w której dodanie nowego odcinka może spowodować wydłużenie średniego czasu przejazdu przez taką sieć. Wydaje się to sprzeczne z intuicją i zostało nazwane w literaturze „paradoksem Braessa”. Po 1968 roku pojawiło się wiele prac analizujących różne aspekty paradoksu Braessa, w szczególności przedstawiających wyniki eksperymentów psychologicznych (z udziałem osób uczestniczących w odpowiedniej grze symulującej wybory dróg przejazdu w sieci opisywanej przez Braessa) [Rapoport, Mak, Zwick, 2006; Morgan, Orzen, Sefton, 2009; Rapoport i in., 2009]. Przeprowadzono też wiele eksperymentów numerycznych, a także znaleziono przykłady rzeczywistych sieci drogowych, w któ-

rych miały miejsce zjawiska podobne do opisanych przez paradoks Braessa [Bazzan, Klügl, 2005; Bagloee i in., 2014].

Współcześnie paradoks Braessa rozważa się w kontekście tzw. gier transportowych (*routing games*), dla których łatwo można zdefiniować pojęcia przepływu równowagi i przepływu optymalnego [Roughgarden, 2007]. Paradoks Braessa można przedstawić wówczas jako pewną wersję dylematu więźnia, tzn. jako sytuację, w której przepływ równowagi nie jest przepływem optymalnym.

Jak do tej pory, w niewielu pracach analizowano problem wyznaczania prawdopodobieństwa zajścia paradoksu Braessa (przy losowo dołączanych odcinkach sieci lub losowo dobieranych funkcjach czasu). Steinberg i Zangwill [1983] znaleźli warunek konieczny i dostateczny zajścia paradoksu Braessa i na tej podstawie wyciągnęli wniosek, że w rozpatrywanych przez nich sieciach (o n wierzchołkach): „Braess’ Paradox is about as likely to occur as not occur”. Niestety nie podali oni w swojej pracy żadnego konkretnego dowodu tej tezy.

Valiant i Roughgarden [2009], korzystając z teorii grafów losowych, udowodnili, że przy pewnych założeniach prawdopodobieństwo pojawienia się paradoksu Braessa w sieciach losowych przy $n \rightarrow \infty$ zmierza do 1.

W artykule zajmujemy się wyłącznie siecią 4-wierzchołkową opisaną przez Braessa, dla której zakładamy jednak, że funkcje czasu na poszczególnych odcinkach (tzn. zależności między czasem przejazdu a intensywnością ruchu na danym odcinku) mogą być nie tylko funkcjami liniowymi lub afinicznymi jak u Braessa, ale również funkcjami sklejanymi złożonymi z funkcji stałej na pewnym odcinku i funkcji afinicznej poza tym odcinkiem. Wydaje się nam, że w wielu sytuacjach takie funkcje bardziej realistycznie opisują ruch drogowy niż funkcje stosowane u Braessa (i również w całej dotychczasowej literaturze poświęconej paradoksowi Braessa).

Przy podanym założeniu – i przy dodatkowych założeniach dotyczących przedziałów zmienności parametrów – wyznaczamy, za pomocą symulacji komputerowych, prawdopodobieństwa pojawienia się paradoksu w sieci Braessa (przy różnych zestawach funkcji czasu przypisanych poszczególnym odcinkom sieci).

W rozdziale 1 przedstawiamy formalizmy potrzebne do opisania paradoksu Braessa (w nieco zmienionej wersji w stosunku do pracy Braessa). W rozdziale 2 opisujemy klasyczny paradoks Braessa, tak jak został on przedstawiony w pracach [Braess, 1968; Braess, Nagurney, Wakolbinger, 2005]. W rozdziale 3 przedstawiamy wyniki symulacji. W podsumowaniu podajemy ogólne wnioski wynikające z przedstawionych badań.

1. Sieci i gry transportowe

Rozważamy grafy zorientowane, acykliczne (bez cykli zorientowanych), o dokładnie jednym wierzchołku początkowym i dokładnie jednym wierzchołku końcowym. Grafy takie interpretujemy jako modele sieci drogowych, w których wierzchołki odpowiadają węzłom sieci, a łuki – odcinkom dróg łączącym poszczególne węzły. Zakładamy, że pewna liczba pojazdów przejeżdża przez taką sieć od węzła początkowego do końcowego, a każdy kierowca wybiera jakąś konkretną drogę przejazdu. Symbolem Q oznaczamy liczbę pojazdów przejeżdżających przez sieć w jednostce czasu (np. liczbę samochodów na godzinę przejeżdżających wszystkimi drogami z węzła 1 do węzła n). Będziemy rozważali sieci z ustaloną wartością całkowitego przepływu Q (Q nazywamy też strumieniem wpływającym do sieci). Dla celów naszej pracy przyjmujemy następującą definicję sieci przepływowej (drogowej):

Definicja 1. Siecią przepływową (inaczej: siecią drogową lub krótko: siecią) nazywamy trójkę (V, A, Q) , gdzie $V = \{1, 2, \dots, n\}$ (zbiór wierzchołków), $A \subset V \times V$ (zbiór łuków) oraz $Q \geq 0$.

W powyższej definicji zakładamy, że (V, A) jest grafem spełniającym podane na początku założenia.

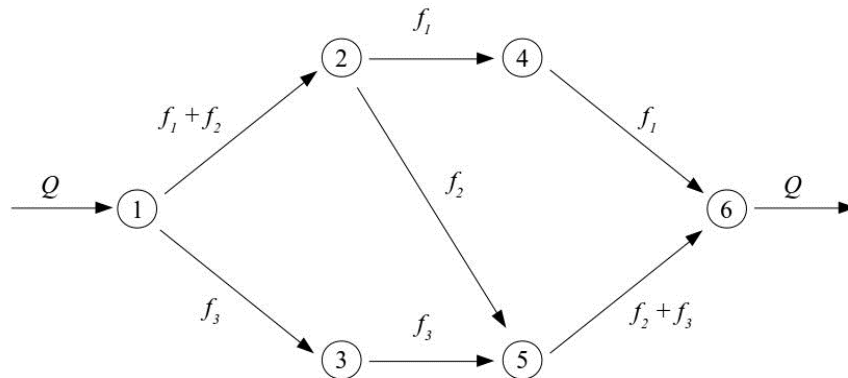
Niech $S = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ będzie zbiorem wszystkich dróg zorientowanych łączących początek sieci (V, A, Q) z jej końcem. Zakładamy, że każdy kierowca wybiera do przejazdu jedną z dróg S_1, S_2, \dots, S_m . Liczbę kierowców, którzy wybrali S_k , oznaczamy symbolem f_k (przepływ wzdłuż drogi S_k). Wprowadzamy następującą definicję przepływu w sieci (V, A, Q) :

Definicja 2. Przepływem w sieci (V, A, Q) nazywamy ciąg liczb (f_1, f_2, \dots, f_m) taki, że:

$$f_1 + f_2 + \dots + f_m = Q \text{ oraz } f_k \geq 0 \text{ dla dowolnego } k.$$

Zauważmy, że w definicjach 1. i 2. nie zakładamy, że Q oraz f_k są liczbami naturalnymi, a więc definicje te mogą obejmować również modele ciągłe, których już nie dotyczy interpretacja związana z kierowcami i pojazdami.

Przepływ w sieci (V, A, Q) jest to więc sposób rozdziału strumienia Q (wpływającego do sieci) na ciąg „podstrumieni” f_k przepływających przez poszczególne drogi. Przykład przepływu w sieci złożonej z 6 wierzchołków i 7 łuków przedstawiony jest na rysunku 1.



Rys. 1. Przykładowy przepływ (f_1, f_2, f_3) ($f_1 + f_2 + f_3 = Q$)

Źródło: Opracowanie własne.

W sieci na rysunku 1 mamy trzy drogi: $S_1 = (1, 2, 4, 6)$, $S_2 = (1, 2, 5, 6)$ i $S_3 = (1, 3, 5, 6)$. Strumień wpływający Q rozdziela się na przepływy: f_1 (wzdłuż S_1), f_2 (wzdłuż S_2) i f_3 (wzdłuż S_3). Zauważmy, że dla każdego łuku możemy tutaj określić przepływ wzdłuż tego łuku, który jest sumą przepływów dla wszystkich dróg zawierających ten łuk. Na przykład przepływ wzdłuż łuku $(1, 2)$ jest równy $f_1 + f_2$, bo łuk ten należy do dwóch dróg: S_1 i S_2 . Przedstawimy teraz formalną definicję przepływu wzdłuż łuku. Niech $(i, j) \in A$ będzie pewnym łukiem w sieci (V, A, Q) . Oznaczamy zbiór numerów wszystkich dróg zawierających łuk (i, j) za pomocą symbolu:

$$D(i, j) = \{k: (i, j) \in S_k\}.$$

Definicja 3. Niech (f_1, f_2, \dots, f_m) będzie przepływem w sieci (V, A, Q) . Przepływem wzdłuż łuku $(i, j) \in A$ nazywamy liczbę:

$$f_{ij} = \sum_{k \in D(i, j)} f_k.$$

W paradoksie Braessa istotną rolę odgrywają czasy przejazdu poszczególnych dróg przez poszczególnych kierowców. Jeżeli daną drogę wybrało niewielu kierowców, to czas przejazdu zależy, ogólnie mówiąc, od długości drogi, jej jakości i różnych zewnętrznych warunków (np. pogodowych) w trakcie przejazdu. Jeśli natomiast drogą jedzie wiele pojazdów, to na czas przejazdu zaczyna wpływać również intensywność ruchu na danej drodze, tzn. duża liczba pojazdów powoduje zatłoczenie i może zwiększać (niekiedy znacznie) czas przejazdu tą drogą.

Zauważmy, że mamy tutaj do czynienia z grą pomiędzy kierowcami, gdyż na czas przejazdu danej drogi przez danego kierowcę (tzn. wypłatę w tej grze)

wpływa nie tylko to, jaką drogę wybrał (czyli jego własna decyzja), ale również to, czy daną drogę wybrali inni kierowcy (czyli decyzje innych graczy).

Przyjmując, że długości dróg w danej sieci i warunki przejazdu (oprócz intensywności ruchu) na każdej drodze są ustalone, zakładamy, że dla każdego łuku (i, j) określona jest funkcja czasu:

$$t_{ij} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

która każdej liczbie nieujemnej $x \in \mathbb{R}_+$ przyporządkowuje liczbę $t_{ij}(x)$ interpretowaną jako średni czas przejazdu łuku (i, j) , przy założeniu, że przepływ (intensywność ruchu) na tym łuku jest równa x . Naturalne jest założenie, że funkcje t_{ij} są niemalejące (tzn. czas przejazdu przy zwiększającej się intensywności ruchu rośnie, a przynajmniej nie maleje).

Mając funkcje czasu dla wszystkich łuków, łatwo można określić czas przejazdu dowolnej drogi S_k .

Definicja 4. Załóżmy, że w sieci (V, A, Q) określony jest przepływ $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ oraz zadana jest rodzina funkcji czasu $\{t_{ij}\}$. Czasem przejazdu drogi S_k dla przepływu f nazywamy liczbę:

$$T(f, S_k) = \sum t_{ij}(f_{ij})$$

(sumowanie po wszystkich parach $(i, j) \in S_k$).

Jako przykład rozważmy ponownie sieć na rysunku 1. Załóżmy, że wszystkie funkcje czasu mają postać $t_{ij}(x) = 5x + 20$ (jeśli np. czas jest mierzony w minutach, a intensywność ruchu w tys. pojazdów/godz., to oznacza to, że przy braku ruchu czas przejazdu każdego odcinka wynosi 20 min., a przy intensywności ruchu 1000 pojazdów/godz. czas przejazdu wynosi 25 min.).

Czas przejazdu np. drogi S_1 łatwo można obliczyć, korzystając z definicji 4. Mamy mianowicie:

$$T(f, S_1) = 5(f_1 + f_2) + 20 + 5f_1 + 20 + 5f_1 + 20 = 15f_1 + 5f_2 + 60.$$

Zauważmy, że czas przejazdu drogi S_1 zależy nie tylko od przepływu na tej drodze (f_1), ale również od przepływu na drodze S_2 (czyli f_2). Ogólnie, czas przejazdu na danej drodze zależy nie tylko od przepływu na tej drodze, ale również od przepływów na wszystkich drogach mających łuki wspólne z tą drogą.

Jak już zauważyliśmy wcześniej, sieć (V, A, Q) , łącznie z rodziną funkcji czasu $\{t_{ij}\}$, może być interpretowana jako gra. Gry tego typu nazywane są grami transportowymi (*routing games*, zob. Roughgarden, 2007). W naszym przypadku jako zbiór graczy możemy przyjąć zbiór wszystkich kierowców (liczba graczy = Q). Każdy kierowca podejmuje decyzję o wyborze drogi S_k . Wypłatą kie-

rowcy jest czas przejazdu drogą S_k . Oczywiście czas ten zależy od tego, ilu innych kierowców wybrało drogę S_k , ale również od tego, ilu kierowców wybrało drogi, które mają wspólne luki z drogą S_k .

Możemy też posługiwać się modelem ciągłym, w którym zbiorem graczy jest np. pewien odcinek (podzbiór zbioru liczb rzeczywistych) o długości Q , a każdą drogę S_k wybiera pewien podzbiór graczy o mierze f_k (założmy, że w zbiorze graczy określona jest np. standardowa miara Lebesgue'a).

Mając model gry, możemy zdefiniować wszystkie podstawowe pojęcia teorii gier, a więc np. równowagę Nasha albo Pareto-optymalny ciąg strategii. W swojej pracy Braess [1968] starał się unikać interpretacji teoriogrowej i w związku z tym definicje optymalności i równowagi, które podajemy, również nie odwołują się do tej interpretacji.

Jakość sieci drogowej można oceniać za pomocą różnych kryteriów, a jednym z nich może być minimalna łączna suma czasów przejazdu wszystkich pojazdów przez sieć [Braess, 1968; Braess, Nagurney, Wakolbinger, 2005]. Sieć można oceniać jako tym lepszą, im mniejsza jest ta suma. Zdefiniujemy przepływ optymalny dla danej sieci jako przepływ minimalizujący taką sumę.

Definicja 5. Przepływ $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ w sieci (V, A, Q) nazywamy przepływem optymalnym, jeśli łączna suma czasów przejazdu wszystkich pojazdów (przejeżdżających przez sieć w jednostce czasu) dla tego przepływu jest nie większa od łącznej sumy czasów przejazdu dla dowolnego innego przepływu $g = (g_1, g_2, \dots, g_m)$, tzn. jeśli spełniona jest nierówność:

$$\sum_k f_k T(f, S_k) \leq \sum_k g_k T(g, S_k).$$

Drugim ważnym pojęciem wykorzystywanym w pracy Braessa jest pojęcie równowagi. Równowagę definiuję się jako przepływ, przy którym czasy przejazdu wszystkich dróg są jednakowe.

Definicja 6. Przepływ $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ w sieci (V, A, Q) nazywa się przepływem równowagi, jeśli:

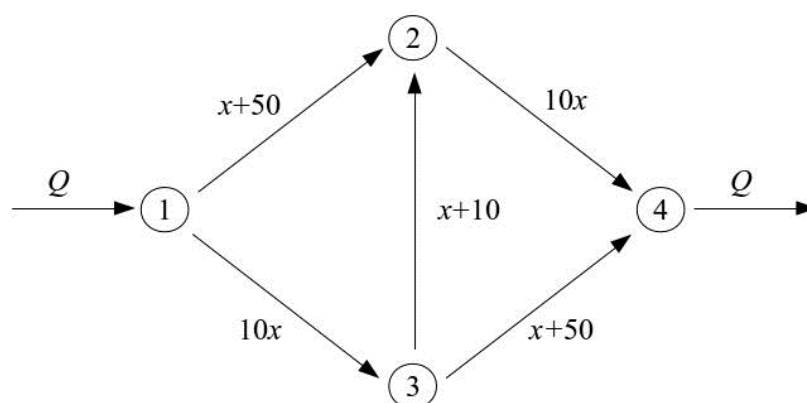
$$T(f, S_1) = T(f, S_2) = \dots = T(f, S_m).$$

Jeśli ruchem pojazdów w sieci mógłby sterować centralny dyspozytor, to jego celem byłoby osiągnięcie oczywiście przepływu optymalnego. Jeśli ruch pojazdów odbywa się spontanicznie i kierowcy mają informacje o czasach przejazdu na poszczególnych drogach, to cały układ będzie dążył do równowagi, tzn. czasy przejazdu na poszczególnych drogach będą się stopniowo wyrównywały.

Przedstawione pojęcie równowagi jest silniejsze od tradycyjnie stosowanego w teorii gier transportowych (zob. Roughgarden, 2007), ale właśnie taki rodzaj równowagi występuje w klasycznym paradoksie Braessa i dlatego będziemy go dalej wykorzystywali.

2. Paradoks Braessa

Paradoks opisany przez Braessa dotyczy sieci złożonej z 4 wierzchołków $\{1, 2, 3, 4\}$ i 5 łuków: $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(3, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 4)$ z funkcjami czasu: $t_{12}(x) = t_{34}(x) = x + 50$, $t_{13}(x) = t_{24}(x) = 10x$, $t_{32}(x) = x + 10$. Sieć przedstawiona jest na rysunku 2.



Rys. 2. Sieć Braessa

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: Braess [1968].

Zakładamy, że strumień wpływający do sieci jest równy $Q = 6$ oraz że na początku sieć nie zawiera łuku $(3, 2)$ [sieć z rys. 2 bez łuku $(3, 2)$ będziemy nazywali siecią pierwotną]. Kierowcy mogą więc wybrać przejazd drogą $S_1 = (1, 2, 4)$ lub $S_2 = (1, 3, 4)$. Łatwo sprawdzić, że $f = (3, 3)$ jest przepływem równowagi oraz że $T(f, S_1) = 3 + 50 + 10 \cdot 3 = 83 = T(f, S_2)$. Przepływ $f = (3, 3)$ jest również przepływem optymalnym, gdyż $\sum_k f_k T(f, S_k) = 3 \cdot 83 + 3 \cdot 83 = 498$ i jest to minimum funkcji $\sum_k f_k T(f, S_k)$ [jest to faktycznie funkcja kwadratowa jednej zmiennej f_1 , gdyż $f_2 = 6 - f_1$].

Po dołączeniu łuku $(3, 2)$ otrzymujemy nową drogę $S_3 = (1, 3, 2, 4)$ i wówczas przepływ równowagi jest równy $f = (2, 2, 2)$ [tzn. przepływ f_1 wzdłuż drogi S_1 jest równy 2, przepływ f_2 wzdłuż S_2 jest równy 2 i przepływ f_3 wzdłuż S_3 jest równy 2] z czasami $T(f, S_1) = T(f, S_2) = T(f, S_3) = 92$. Przepływ optymalny dla

sieci z dołączonym łukiem $(3, 2)$ (będziemy ją nazywali siecią rozszerzoną) ma postać $g = (3, 3, 0)$ z czasami $T(g, S_1) = 83$, $T(g, S_2) = 83$, $T(g, S_3) = 70$.

Sytuację powyższą można interpretować następująco. Sieć pierwotna zawiera tylko dwie drogi S_1 i S_2 , a ze względu na symetrię funkcji czasu strumień kierowców $Q = 6$ rozdziela się na dwie równe części i osiągnięta jest w ten sposób równowaga. Po wybudowaniu nowego odcinka $(3, 2)$ kierowcy mają do dyspozycji nową drogę S_3 i próbują z niej skorzystać, ponieważ czas przejazdu tą drogą (jeśli jeszcze nie ma na niej ruchu) wynosi 70 i jest znacznie niższy niż czas przejazdu drogami S_1 i S_2 (równy 83). Jednak w miarę zwiększania się liczby kierowców na drodze S_3 zwiększa się czas przejazdu nie tylko drogą S_3 , ale również drogami S_1 i S_2 [gdyż kierowcy, którzy wybierali wcześniej S_1 , a teraz wybierają S_3 , zwiększają dodatkowo zatłoczenie na odcinku $(1, 3)$, a kierowcy, którzy wybierali S_2 i przenieśli się na S_3 , zwiększają zatłoczenie na $(2, 4)$].

Stopniowo czas przejazdu na wszystkich drogach dochodzi do 92, a więc paradoksalnie jest znacznie wyższy niż czas przejazdu w pierwotnej sieci wzdłuż dróg S_1 i S_2 . Okazuje się więc, że kierowcy najlepiej zrobiliby, nie rezygnując z przejazdu drogami S_1 i S_2 i nie przenosząc się na drogę S_3 . Problem polega na tym, że ci, którzy tak robią, tracą na tym, gdyż dla pojedynczych kierowców, którzy przeniosą się na S_3 , czas jazdy oczywiście się skróci.

Z punktu widzenia teorii gier problem polega na tym, że rozwiązanie optymalne dla sieci rozszerzonej nie pokrywa się ze stanem równowagi dla tej sieci (równowaga jest w tym przypadku równowagą Nasha). Mamy więc tutaj do czynienia z sytuacją analogiczną do dylematu więźnia, gdzie więźniowie mogą wybrać rozwiązanie, które jest dla każdego z nich najlepsze (tzn. dla każdego z nich osobno) i wtedy znajdą się w równowadze Nasha (żadnemu z nich nie opłaca się zmienić tego rozwiązania, jeśli drugi nie zmieni), albo rozwiązanie, które jest lepsze i optymalne dla nich obu jednocześnie (ale wtedy każdemu z nich grozi, że drugi „oszuka” i zmieni swoją decyzję – wtedy ten, który pozostał przy swojej decyzji, traci).

W sieci Braessa (rozszerzonej) kierowcy albo mogą wybrać drogę, która z ich indywidualnego punktu widzenia jest najlepsza (i wtedy wszyscy na tym tracą), albo drogę optymalną dla wszystkich jednocześnie (ale wtedy muszą się jakoś w tej sprawie „umówić” lub poddać się decyzji „centralnego dyspozytora”, gdyż kierowca, który wyłamie się z umowy lub nie podda się decyzji „dyspozytora”, zyskuje kosztem innych).

3. Eksperymenty numeryczne

Paradoks Braessa rodzi wiele pytań. Po pierwsze, czy podobne paradoksy są możliwe dla innych sieci i dla innych funkcji czasu? Po drugie, jeśli założymy, że drogi w sieci są dołączane losowo, a parametry funkcji czasu również wybierane losowo, to jakie jest prawdopodobieństwo pojawienia się paradoksu w takiej sieci? Próby odpowiedzi na tego rodzaju pytania zawarte są w pracach [Steinberg, Zangwill, 1983; Valiant, Roughgarden, 2009]. Nie udało nam się jednak znaleźć w literaturze konkretnych oszacowań prawdopodobieństw pojawienia się paradoksu Braessa w konkretnych sieciach.

Przedstawione w naszej pracy eksperymenty¹ dotyczą klasycznej sieci Braessa, takiej jak na rysunku 2. Wykorzystaliśmy jako funkcje czasu, oprócz funkcji afinicznych i liniowych, z których korzystał Braess, także funkcje sklejące utworzone z funkcji stałej i funkcji afinicznej.

Wykorzystane rodzaje funkcji czasu mają następującą postać:

1. Funkcje liniowe (L) postaci $t(x) = \alpha x$ ($\alpha > 0$);
2. Funkcje afiniczne (A) postaci $t(x) = \alpha x + \beta$ ($\alpha, \beta > 0$);
3. Funkcje sklejące (S) postaci:

$$t(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta, & \text{jeśli } x \geq PS, \\ \gamma, & \text{jeśli } 0 \leq x < PS, \end{cases}$$

($\alpha, \beta, \gamma, PS > 0$).

Dla funkcji sklejących punkt $PS > 0$ jest punktem sklejenia funkcji stałej ($t(x) = \gamma$) oraz funkcji afinicznej ($t(x) = \alpha x + \beta$).

W klasycznym paradoksie Braessa [Braess, 1968; Braess, Nagurney, Wakolbinger, 2005] przedstawionym w rozdziale 2 używa się jedynie liniowych i afinicznych funkcji czasu. Tego rodzaju funkcje są również wykorzystywane w pracach eksperymentalnych [Rapoport, Mak, Zwick, 2006; Morgan, Orzen, Sefton, 2009; Rapoport i in., 2009] oraz w rozważaniach teoretycznych dotyczących prawdopodobieństwa pojawienia się tego paradoksu [Valiant, Roughgarden, 2009].

Zauważmy jednak, że np. funkcje liniowe w sposób zupełnie nierealistyczny przedstawiają zależność między intensywnością ruchu, a czasem przejazdu, gdyż zakładają, że przy zerowej intensywności ruchu czas przejazdu jest również równy zero. W przypadku funkcji afinicznych czas przejazdu dla zerowej

¹ Eksperymenty opracował i przeprowadził Paweł Skąlecki.

intensywności ruchu jest pewną liczbą dodatnią β , a potem rośnie liniowo, zatem nawet przy niewielkim ruchu jest już większy niż β . Wydaje się nam, że bliższe rzeczywistości byłyby funkcje, dla których czas przejazdu dla pewnego początkowego odcinka skali intensywności ruchu jest stały i dodatni (a więc przy niewielkim ruchu czas przejazdu jest taki sam, jak przy zerowym ruchu) i dopiero po przekroczeniu pewnej granicznej wartości zaczyna rosnąć. Sądymy, że właśnie funkcje sklejące typu (S) mogłyby być w miarę prostym modelem takiej zależności.

Nie udało nam się znaleźć w literaturze ani modeli, ani przykładu badań empirycznych z funkcjami sklejanymi, ale ze względu na większą „realistyczność” takich funkcji, postanowiliśmy je również włączyć do naszych eksperymentów. Używamy też oczywiście funkcji liniowych i afinicznych, gdyż chcemy porównać przypadek klasyczny (przedstawiony przez Braessa) z przypadkami, w których mogą wystąpić funkcje sklejące.

Parametry funkcji czasu były losowane (z krokiem 0,2) z następujących przedziałów: $\alpha \in (1; 8)$, $\beta \in (1; 11)$, $PS \in (0; 6)$, $Q \in [1; 5]$ (dla funkcji sklepanych wyznaczenie α , β , PS jednoznacznie wyznacza, przy założeniu ciągłości funkcji, parametr γ).

Przeprowadzono 6 rodzajów eksperymentów:

1. Eksperymenty typu I(S) – dla każdego łuku losowana była funkcja typu S (tzn. losowo były wybierane parametry takiej funkcji).
2. Eksperymenty typu II(S/A) – dla każdego łuku losowany był (z prawdopodobieństwem 1/2) typ funkcji – ze zbioru {S, A}, a następnie, dla wylosowanej funkcji losowane były jej parametry.
3. Eksperymenty typu III(S/L) – podobnie jak poprzednio, losowane były funkcje typu S lub L.
4. Eksperymenty typu IV(S/A/L) – losowane były funkcje typu S lub A lub L (prawdopodobieństwo = 1/3) oraz ich parametry.
5. Eksperymenty typu V(A) – losowane były funkcje typu A.
6. Eksperymenty typu VI(A/L) – losowane były funkcje typu A lub L.

Nie przeprowadzaliśmy eksperymentów tylko z funkcjami L, ze względu na małą realistyczność takiej sytuacji.

Dla każdego rodzaju eksperymentu przeprowadzono 375000 symulacji polegających na wyborze funkcji czasu dla każdego łuku i sprawdzeniu, czy istnieje równowaga w sieci pierwotnej, czy istnieje równowaga w sieci rozszerzonej i czy czas przejazdu dla równowagi w sieci rozszerzonej jest większy niż czas przejazdu dla równowagi w sieci pierwotnej (tzn. czy zachodzi paradoks Braessa). Ze względów numerycznych poszukiwana była w każdym przypadku tzw.

ε -równowaga, tzn. przepływ, dla którego czasy przejazdu różnią się o nie więcej niż ε (w eksperymentach przyjęliśmy $\varepsilon = 0,001$). Wszystkie ε -równowagi były poszukiwane metodą dopasowywania (*adjustment*), tzn. poprzez stopniowe (z krokiem $\delta = 0,01$) zwiększanie przepływów na drogach, na których czas był poniżej średniego i jednocześnie zwiększanie przepływów na drogach z czasem powyżej średniego.

Zauważmy, że podana wcześniej definicja 6. wcale nie gwarantuje istnienia równowagi (jeśli np. funkcje czasu na obu drogach w sieci pierwotnej będą stałe i różne, to równowaga nie istnieje). Może więc nie istnieć również ε -równowaga i w tym przypadku oczywiście paradoks Braessa (PB) nie zachodzi. Sprawdzenie, czy zachodzi PB czy nie, było przeprowadzane dopiero w przypadku, gdy zarówno w sieci pierwotnej, jak i rozszerzonej istniała ε -równowaga.

Wyniki przeprowadzonych eksperymentów przedstawione są w poniższej tabeli.

Tabela 1. Wyniki eksperymentów

Typ	L. eksp.	ε -równ.	%	PB	%	PB/ ε -równ. %
I(S)	375000	3504	0,93	2542	0,68	72,54
II(S/A)	375000	17773	4,74	9557	2,55	53,77
III(S/L)	375000	24207	6,46	12425	3,31	51,32
IV(S/A/L)	375000	20288	5,41	11349	3,03	55,94
V(A)	375000	41019	10,94	37616	10,03	91,70
VI(A/L)	375000	61744	16,47	9484	2,53	15,36
Łącznie	2250000	168535	7,49	82973	3,69	49,23

Źródło: Obliczenia własne.

W kolumnie 3. tabeli 1 (ε -równ.) przedstawiona jest liczba eksperymentów (osobno dla każdego typu eksperymentu oraz łącznie), w których znaleziono ε -równowagę zarówno w sieci pierwotnej, jak i rozszerzonej, a w kolumnie 4. procentowy udział tej liczby w liczbie wszystkich eksperymentów. W kolumnie 5. przedstawiono liczbę eksperymentów, w których wykryto paradoks Braessa (PB), a w kolumnie 6. procentowy udział tej liczby w liczbie wszystkich eksperymentów. W kolumnie 7. przedstawiono procentowy udział liczby eksperymentów, w których stwierdzono PB w liczbie eksperymentów, w których znaleziono ε -równowagę (w obu sieciach).

Otrzymane wyniki pokazują, że zaledwie w ok. 7,5% przypadków istnieje równowaga w obu sieciach (zwykle istnieje równowaga w sieci pierwotnej, natomiast prawdopodobieństwo wystąpienia równowagi w sieci rozszerzonej jest dosyć małe). Paradoks Braessa wystąpił w ok. 3,7% przypadków (w ok. 50% przypadków, w których wystąpiła równowaga).

Jednocześnie istnieje dosyć duże zróżnicowanie wyników ze względu na rodzaj funkcji czasu wykorzystywanych w symulacjach. Najmniej ε -równowag (0,93%) i PB (0,68%) znaleziono dla funkcji sklepanych. Najwięcej ε -równowag (16,47%) znaleziono dla przypadku A/L (funkcje afiniczne lub liniowe), czyli dla przypadku, który obejmuje klasyczny PB. Jednocześnie w tym przypadku wykryto stosunkowo niewiele (2,53% w stosunku do ogółu i 15,36% w stosunku do liczby równowag) przypadków zachodzenia PB.

Największe prawdopodobieństwo zajścia PB występuje dla funkcji afinicznych (przypadek V(A) – ok. 10%). W tym przypadku PB jest bardzo prawdopodobny (91,7%) w sytuacji istnienia równowagi.

Oczywiście wyniki zależą od przyjętych przedziałów zmienności parametrów. W trakcie przeprowadzania obliczeń eksperymentowaliśmy z różnymi przedziałami zmienności. Okazało się, że przy podanych przedziałach przedstawione procentowe wyniki były stosunkowo najwyższe.

Podsumowanie

Przedstawione wyniki pokazują, że paradoks Braessa może zachodzić nie tylko dla liniowych lub afinicznych funkcji czasu, ale również dla funkcji sklepanych, stałych dla pewnego przedziału intensywności ruchu. W tym ostatnim przypadku prawdopodobieństwo zajścia PB jest jednak wyraźnie mniejsze niż w przypadku funkcji afinicznych lub liniowych. W sieciach Braessa stosunkowo nieduże jest prawdopodobieństwo wystąpienia równowagi (jednocześnie w sieci pierwotnej i rozszerzonej), a prawdopodobieństwo zajścia PB (przy przyjętych założeniach i przedziałach zmienności parametrów) wynosi ok. 3-4%.

Warto byłoby w przyszłości przeprowadzić więcej podobnych eksperymentów, z różnymi rodzajami funkcji czasu i dla różnych (bardziej skomplikowanych niż sieć Braessa) sieci. W literaturze przedmiotu nie ma dotychczas konkretnych liczbowych oszacowań prawdopodobieństwa zajścia PB dla różnych sieci i przy różnych założeniach.

Problemem jest też oczywiście próba oszacowania funkcji czasu dla konkretnych sieci drogowych. Rozwiązanie tego problemu wykracza jednak poza zakres naszego opracowania.

Literatura

- Bagloee S.A., Ceder A., Tavana M., Bozic C. (2014), *A Heuristic Methodology to Tackle the Braess Paradox Detecting Problem Tailored for Real Road Networks*, "Transportmetrica A: Transport Science", No. 5(10), s. 437-456.
- Bazzan A.L.C., Klügl F. (2005), *Case Studies on the Braess Paradox: Simulating Route Recommendation and Learning in Abstract and Microscopic Models*, "Transportation Research Part C", Vol. 13, s. 299-319.
- Braess D. (1968), *Über ein Paradoxon aus der Verkehrsplanung*, „Unternehmensforschung“, Nr. 12, s. 258-268.
- Braess D., Nagurney A., Wakolbinger T. (2005), *On a Paradox of Traffic Planning*, "Transportation Science", No. 4(39), s. 446-450.
- Morgan J., Orzen H., Sefton M. (2009), *Network Architecture and Traffic Flows: Experiments on the Pigou-Knight-Downs and Braess Paradoxes*, "Games and Economic Behavior", Vol. 66, s. 348-372.
- Rapoport A., Kugler T., Dugar S., Gisches E.J. (2009), *Choice of Routes in Congested Traffic Networks: Experimental Tests of the Braess Paradox*, "Games and Economic Behavior", Vol. 65, s. 538-571.
- Rapoport A., Mak V., Zwick R. (2006), *Navigating Congested Networks with Variable Demand: Experimental Evidence*, "Journal of Economic Psychology", Vol. 27, s. 648-666.
- Roughgarden T. (2007), *Routing Games* [w:] N. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos, V.V. Vazirani (eds.), *Algorithmic Game Theory*, Cambridge University Press, s. 461-486.
- Steinberg R., Zangwill W.I. (1983), *The Prevalence of Braess' Paradox*, "Transportation Science", No. 3(17), s. 301-318.
- Valiant G., Roughgarden T. (2009), *Braess's Paradox in Large Random Graphs*, working paper, <http://theory.stanford.edu/~tim/papers/rbp.pdf> (dostęp: 24.04.2017).

ROUTING GAMES AND THE BRAESS PARADOX

Summary: The Braess paradox [1968] describes route (road) networks for which adding a new route may cause an increase of the average travel time in the network. In the paper, we introduce mathematical formalisms necessary for analysis of the Braess type paradoxes. We also present results of numerical experiments showing how often in the Braess network with randomly chosen time functions, the Braess paradox occurs. In the experiments, we use not only linear or affine time functions (as used by Braess), but also spline functions (constant for a certain interval of a flow variable).

Keywords: Braess paradox, road network, routing game, equilibrium flow, optimal flow.