



## Grażyna Trzpiot

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach  
Wydział Informatyki i Komunikacji  
Katedra Demografii i Statystyki Ekonomicznej  
grazyna.trzpiot@ue.katowice.pl

# ODPORNY POMIAR RYZYKA

**Streszczenie:** Szacowanie prawdopodobieństwa w problemach, w których mogą wystąpić różne zdarzenia, jest zazwyczaj niezwykle trudnym zadaniem, podlega bowiem wielu źródłom niepewności. Wiemy, że rozkłady prawdopodobieństwa mogą zmieniać się w czasie, co prowadzi do bardzo trudnych ocen ryzyka wywołanych przez konkretne decyzje. Rozważając rozkłady prawdopodobieństwa oraz zbiór nominalnych miar ryzyka, przedstawiamy koncepcję odpornej miary ryzyka. Odporną miarę ryzyka rozpatrzmy jako najgorszy możliwy zbiór ryzyk przy założeniu, że każdy ze zbiorów rozkładów prawdopodobieństwa jest prawdopodobny. Omówimy właściwości odpornej miary ryzyka związane z nominalnymi zbiorami ryzyka, takie jak wypukłość lub koherencja. W szczególności omówimy odporną wersję warunkowego Value-at-Risk (*CVaR*). Zastosowania omówionego podejścia odniesiemy do aktywów z GPW w Warszawie.

**Słowa kluczowe:** miary ryzyka, odporne miary ryzyka, odporne *CVaR*.

**JEL Classification:** C14, C44, G11.

## Wprowadzenie

W ilościowym zarządzaniu ryzykiem miary ryzyka służą do określania preferencyjnego porządku wśród pozycji finansowych z losowym wynikiem. Każda pozycja finansowa jest postrzegana jako zmienna losowa, która odwzorowuje każdy stan natury  $x$  w rzeczywistą wartość. Wartość odpowiada wynagrodzeniu zapewnianemu przez instytucję finansową, gdy wystąpi stan  $x$ . Miary ryzyka mają na celu uwzględnienie kompromisu między wielkościami wartości, jakie może zajmować wybrana pozycja finansowa, a ryzykiem lub zmiennością tych wartości. Matematycznie są one mapowaniem przestrzeni zmiennych losowych

do przestrzeni rzeczywistej. Wybór miary ryzyka określa profil ryzyka inwestycyjnego. Portfel jest liniową kombinacją wybranych dostępnych aktywów, z których każdy charakteryzuje się kosztem oraz opisywany jest zmienną losową reprezentującą dochody (stopy zwrotu), w granicach ustalonego budżetu. Markowitz [1952] definiuje ryzyko portfela jako zależne od oczekiwanego zwrotu oraz wariancji stopy zwrotu. Zatem wartości dwóch parametrów rozkładu określają profil ryzyka inwestora.

Od przełomowego artykułu Markowitza wprowadzono wiele innych miar ryzyka. Najbardziej istotny był fakt, że miara ryzyka, jaką jest wartość zagrożona (Value-at-Risk,  $VaR$ ), kwantyl rozkładu prawdopodobieństwa dla stopy zwrotu z inwestycji, została wykorzystana w instytucjach finansowych [RiskMetrics, 1995]. Miara ta została skrytykowana za brak wykrywania niekorzystnych wartości stóp zwrotu w ogonie rozkładu prawdopodobieństwa [Donnelly, Embrechts 2010; Trzpiot 2007; 2009a; 2009b]. Wprowadzono klasy ryzyka, które spełniają pewne pożądane właściwości. Klasa wypukłych miar ryzyka [Föllmer, Schied, 2002] obejmuje monotonne i wypukłe odwzorowania, które posiadają własność niezmienniczości translacji. Każde wypukłe ryzyko może być wyrażone poprzez sprzężenie z pewną funkcją „kary” zdefiniowanej w przestrzeni miar. Taki zapis może służyć do obliczania wartości optymalnych portfeli i oceny ich elastyczności [Lüthi, Doege, 2005]. Koherentne miary ryzyka [Artzner i in., 1999] stanowią podklasę wypukłych miar ryzyka, są to miary dodatnio homogeniczne. Mogą być wyrażone jako najgorszy oczekiwany wynik portfela, gdy miara prawdopodobieństwa stóp zwrotów z aktywów zmienia się w zbiorze niepewnych stóp zwrotu [Artzner i in., 1999; Trzpiot, 2016]. Warunkowa wartość zagrożona (Conditional Value-at-Risk,  $CVaR$ ), czyli oczekiwana wartość portfela na ogonie rozkładu stopy zwrotu portfela, która leży poza ustalonym kwantylem rozkładu, jest koherentną miarą ryzyka. Optymalny portfel wykorzystaniem  $CVaR$  można wyznaczyć, wykorzystując różne estymatory [Rockafellar, Uryasev, 2000; Trzpiot, 2008].

Ze względu na wewnętrzną niepewność badanego zbioru danych może się zdarzyć, że dane definiujące problem nie są dokładnie znane. W rezultacie optymalne rozwiązanie obliczone dla niepewnego problemu jest dalekie od optymalnego lub nawet niemożliwe dla rzeczywistego problemu. W celu rozwiązania takich problemów wykorzystuje się odporną optymalizację. Zakłada się, że dane rzeczywiste należą do wcześniej zdefiniowanego zbioru niepewności  $S$ , następnie przyporządkowuje każdemu możliwemu punktowi gorszą wartość obiektywną wśród wszystkich problemów z danymi w  $S$ . Najlepszym punktem, z najkorzystniejszą stopą zwrotu, jest wtedy możliwy do zrealizowania punkt

z najlepszymi tych gorszych wartości, a tym samym jest on odporny na niepewność danych. Minimalizowanie koherentnej miary ryzyka jako kombinacji afinicznej zmiennych losowych może być sformułowane jako odporny problem optymalizacyjny [Bertsimas, Brown, 2009]. Rozważać można również problemy, gdy model rozkładu prawdopodobieństwa losowych pozycji nie jest wolny od błędów. Można określić klasę sparametryzowanych rozkładów prawdopodobieństwa, wśród których rzeczywisty jest określany za pomocą standardowych procedur szacowania parametrów [Trzpiot, 2009a; 2009b; Trzpiot, Krężolek, 2009; Trzpiot, Majewska, 2009; 2010]. Procedury te mogą dawać przedziały ufności, które można wykorzystać jako zbiory niepewności w ramach odpornych optymalizacji [Bertsimas, Pachamanova, 2008]. Odporne rozwiązania są nienukniżone, a ze względu na zazwyczaj nieskończoną liczbę dodatkowych ograniczeń, uzyskiwana stopa zwrotu jest często znacznie niższa niż uzyskiwana w sposób nieodporny.

W artykule podejmujemy problem oceny ryzyka, gdy miara prawdopodobieństwa prowadząca do podstawowego procesu losowego nie jest dokładnie znana, ale znajduje się w pewnym rozkładzie losowym, zwanym scenariuszem. Na podstawie funkcji scenariusza mamy jedną miarę ryzyka przypadającą na każdą funkcję prawdopodobieństwa. Używamy rodziny miar ryzyka, z których każda jest indeksowaną miarą prawdopodobieństwa wynikającą ze scenariuszy. Zapišemy odporną miarę ryzyka oraz wskażemy właściwości, takie jak wypukłość i koherentność, które są przenoszone na miary odporne. Następnie zapišemy odporną warunkową wartość zagrożoną (*RCVaR*). Przyjmujemy do rozważań ciągłe lub dyskretne rozkłady prawdopodobieństwa wraz z ogólnymi ograniczeniami związanymi z normą. W przypadku odpornego *CVaR* dla rozkładów ciągłych, możliwa jest optymalizacja portfela poprzez stochastyczną średnią metodę przybliżania, która nakłada dyskretyzację na przestrzeń prób [Shapiro, Dentcheva, Ruszczyński, 2009].

## 1. Odporne miary ryzyka

Zapišemy odporną miarę ryzyka w odniesieniu do rodziny nominalnych miar ryzyka oraz niepewnego zbioru miar prawdopodobieństwa, które indukują proces losowy. Badamy strukturę odpornych miar ryzyka dla rodziny nominalnych miar ryzyka, zawierającej ryzyko wypukłe lub koherentne. Ważne jest, by użyte miary ryzyka, w wyniku zastosowania paradygmatu odpornego modelu optymalizacji dla rozkładu prawdopodobieństwa, były zgodne z pewnymi zasa-

dami spójnego podejmowania decyzji, które wymagały definicji wypukłych i koherentnych miar ryzyka. Przedstawiamy definicję wypukłych miar ryzyka i twierdzenie reprezentacyjne [Föllmer, Schied, 2002; Shapiro, Dentcheva, Ruszczyński, 2009].

**Definicja 1.** Rozważając przestrzeń probabilistyczną  $(\Omega, F, P)$  oraz klasę zmiennych losowych  $L^1(\Omega, F, P)$ , odwzorowanie  $\rho: L^1(\Omega, F, P) \rightarrow \mathbf{R}$  nazywa się wypukłą miarą ryzyka, jeżeli ma następujące własności:

1. **Monotoniczność:** Jeżeli  $X_1, X_2 \in L^1(\Omega, F, P)$  oraz  $X_1 \leq X_2$ , prawie wszędzie względem  $P$ , to:  $\rho(X_1) \leq \rho(X_2)$ .
2. **Translacja inwariantna:** Jeżeli  $X, A \in L^1(\Omega, F, P)$  oraz  $A = \alpha$ , prawie wszędzie względem  $P$ ,  $\alpha \in \mathbf{R}$ , to:  $\rho(X + A) = \rho(X) - \alpha$ .
3. **Wypukłość:** Jeżeli  $X_1, X_2 \in L^1(\Omega, F, P)$ ;  $0 \leq \lambda \leq 1$ , to:  $\rho(\lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2) \leq \lambda \rho(X_1) + (1 - \lambda) \rho(X_2)$ .

Ustalmy przestrzeń prawdopodobieństwa  $(\Omega, F, P)$ . Przyjmujemy prawdopodobieństwo  $P$  jako referencyjną miarę prawdopodobieństwa. Aby pozwolić na zmiany prawdopodobieństwa, w przeciwieństwie do podejścia standardowego, nie zakładamy, że rozkład prawdopodobieństwa, który generuje losowy proces naszego problemu, to  $P$ , ale jest to taki rozkład, który jest tylko minimalnie związany z  $P$ . Specyficznie, gdy  $P_0$  jest zbiorem wszystkich miar prawdopodobieństwa na przestrzeni  $(\Omega, F)$ , można zapisać zbiór:

$$\mathbf{P} = \{ P \in P_0 \mid P \ll P \text{ oraz } dP/dP \in L^\infty(\Omega, F, P) \}, \quad (1)$$

gdzie  $P \ll P$  oznacza, że  $P$  jest absolutnie ciągła względem  $P$ , każdy zbiór nieistotny  $P$  jest również  $P$  – nieistotny oraz  $dP/dP$  jest pochodną Radona-Nikodyma  $P$  względem  $P$ . Zauważmy, że  $\mathbf{P}$  jest zbiorem wypukłym.

Weźmy przestrzeń  $L^1(\Omega, F, P)$  z topologią indukowaną poprzez normę  $\|X\|_1 := \int |X| dP$ . Topologię  $L^\infty(\Omega, F, P)$  wykorzystamy jako słabą-\* topologię, która sprawia, że każdy liniowy funkcjonalny na  $L^\infty(\Omega, F, P)$ , określony przez niektóre  $X \in L^1(\Omega, F, P)$ , jest ciągły. Zauważmy, że  $L^1(\Omega, F, P) \subseteq L^1(\Omega, F, P)$  dla każdego  $P \in P$ . Zbiór rozkładów prawdopodobieństw, które mogą indukować losowy proces naszego problemu, jest podzbiorem  $S$  rozkładów  $P$ , nazywanym scenariuszem. Załóżmy, że naszym problemem rządzą  $P \in S$ . Ogólnie rzecz ujmując, miara ryzyka, którą posłużyliśmy się do oceny portfela, zależy bezpośrednio od  $P$  (np. jeżeli  $q$  jest wariancją portfela), co zapisujemy jako  $q_P$ . Teraz, miara ryzyka  $\rho_P$  powinna być co do zasady określona dla każdego  $X \in L^1(\Omega, F, P)$ .

**Twierdzenie 1<sup>1</sup>.** Rozważając przestrzeń probabilistyczną  $(\Omega, F, P)$ , przestrzeń  $L^1(\Omega, F, P)$  całkowalnych zmiennych losowych oraz  $\mathbf{P}$  [zapisane jako (1)], należy stwierdzić, że odwzorowanie  $\rho: L^1(\Omega, F, P) \rightarrow \mathbf{R}$  jest właściwą, dolnie półciągłą oraz wypukłą miarą ryzyka wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje właściwa funkcja kary  $\alpha: \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{R}$  taka, że:

$$\rho(X) = \max_{P \in \mathbf{P}} (E_P[-X] - \alpha(P)),$$

Definiujemy  $M^0$  jako zbiór zawierający wszystkie indeksowane miary na przestrzeni probabilistycznej  $(\Omega, F)$  oraz zbiór  $M$  jako:

$$M = \{ P \in M^0 \mid P \ll \mathcal{P} \text{ oraz } dP/d\mathcal{P} \in L^\infty(\Omega, F, \mathcal{P}) \}. \quad (2)$$

Zbiór  $M$  jest podprzestrzenią  $\rho: L^1(\Omega, F, P) \rightarrow \mathbf{R}$  oraz  $\mathbf{P} \subseteq M$ . Ponadto istnieje bijekcja pomiędzy  $M$  oraz  $L^\infty(\Omega, F, P)$  (dana przez pochodną Radon-Nikodym względem  $P$ ). W ten sposób mamy także  $M$  ze słabą topologią  $L^\infty(\Omega, F, P)$  oraz wprowadzamy  $L^1(\Omega, F, P)$  w dualność z  $M$  poprzez formę  $\{X, P\} \rightarrow E_P[-X]$ . Zapiszemy definicję innej ważnej klasy miar ryzyka – koherentnych miar ryzyka, która ma naturalną interpretacją ekonomiczną [Artzner i in., 1999] oraz twierdzenie reprezentacyjne [Artzner i in., 1999; Shapiro, Dentcheva, Ruszczyński, 2009].

**Definicja 2.** Odwzorowanie  $\rho: L^1(\Omega, F, P) \rightarrow \mathbf{R}$  nazywane jest koherentną miarą ryzyka, jeżeli jest wypukłą miarą ryzyka oraz spełnia następujące własności:

1. **Dodatnia homogeniczność:** Jeżeli  $X \in L^1(\Omega, F, P)$  oraz  $k \geq 0$ , to  $\rho(kX) = k\rho(X)$ .
2. **Subaddytywność:** Jeżeli  $X, Y \in L^1(\Omega, F, P)$ , to zachodzi  $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$ .

**Twierdzenie 2<sup>2</sup>.** Przyjmujemy założenia twierdzenia 1. Odwzorowanie  $\rho: L^1(\Omega, F, P) \rightarrow \mathbf{R}$  jest koherentną miarą ryzyka o wartościach rzeczywistych wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje niepusty, słabo-\* zwarty i wypukły zbiór  $Q \subseteq P$  miar prawdopodobieństwa, że:

$$\rho(X) = \max_{P \in Q} E_P[-X],$$

Rozważmy zbiór scenariuszy  $S \subseteq P$  oraz rodzinę miar ryzyka:  $\{\rho_P: L^1(\Omega, F, P) \rightarrow \mathbf{R} \mid P \in S\}$ .

<sup>1</sup> Twierdzenie zapisano na podstawie: [Föllmer, Schied, 2002].

<sup>2</sup> Twierdzenie zapisano na podstawie: [Artzner i in., 1999; Shapiro, Dentcheva, Ruszczyński, 2009].

**Definicja 3.** Odporna miara ryzyka  $\rho_S^R : L^1(\Omega, F, \mathcal{P}) \rightarrow \mathbf{R}$  odpowiadająca rodzinie  $\{\rho_P : L^1(\Omega, F, \mathcal{P}) \rightarrow \mathbf{R} \mid P \in S\}$  jest definiowana jako [Fertis, Baes, Lüthi, 2012]:

$$\rho_S^R = \sup_{P \in S} \rho_P(X), \quad \text{dla wszystkich } X \in L^1(\Omega, F, \mathcal{P}),$$

Idea pomiaru ryzyka jako odpornego ryzyka to ocena najgorszego ryzyka, jeśli możliwe jest zastosowanie każdej z miar prawdopodobieństwa w zestawie scenariuszy. Twierdzenia określają zasadnicze właściwości miar ryzyka, w tym odpornych, oraz różniczkowalność, gdy miary ryzyka w  $S$  są wypukłe lub koherentne. Różniczki cząstkowe określają kierunek spadku do aktywów z najgorszym możliwym ryzykiem, gdy możliwe jest zastosowanie każdej z miar prawdopodobieństwa w zestawie scenariuszy [Fertis, Baes, Lüthi, 2012]. Różniczki cząstkowe determinują kierunek spadku  $\rho_S^R$  w  $L^1(\Omega, F, \mathcal{P})$ , co zgodnie ze standardową teorią dualizmu w wypukłej analizie [Rockafellar, 1970] można obliczyć, rozwiązując problem optymalizacji wypukłej.

**Własność 1<sup>3</sup>.** Zakładamy, że  $S$  jest słabo-\* zwarty oraz że dla każdego  $P \in S$  miara ryzyka  $\rho_P$  ograniczona do  $L^1(\Omega, F, \mathcal{P})$  jest właściwa, dolnie półciągła oraz wypukła. Zapiszmy jako  $\alpha_P$  funkcję kary ograniczoną do  $\rho_P$  w  $L^1(\Omega, F, \mathcal{P})$  z twierdzenia 1. Definiujemy dla każdego  $Q \in \mathcal{P}$  odwzorowanie  $\kappa_Q : M \rightarrow \mathbf{R}$ :

$$\begin{aligned} \kappa_Q &:= \alpha_P(P), \text{ jeżeli } P \in S, \\ \kappa_Q &:= \infty \text{ w przeciwnym razie.} \end{aligned}$$

Jeżeli  $\kappa_Q$  jest właściwa oraz słabo-\* dolnie półciągła, to  $\rho_S^R$  jest właściwym, dolnie półciągłym odwzorowaniem oraz dla każdego  $X \in L^1(\Omega, F, \mathcal{P})$ :

$$\rho_S^R = \sup_{\substack{Q \in \mathcal{P}, \\ P \in S}} (E_Q[-X] - (\text{lsc}(\text{cv}(\inf \alpha(P))))),$$

Dodatkowo, jeżeli  $\rho_S^R \in \mathbf{R}$  oraz  $X \in L^1(\Omega, F, \mathcal{P})$ , to różniczka cząstkowa z  $\rho_S^R$  w  $X$  jest dana jako:

$$\begin{aligned} \partial \rho_S^R &= \text{argmax}_{\substack{Q \in \mathcal{P}, \\ P \in S}} (E_Q[-X] - (\text{lsc}(\text{cv}(\inf \alpha(P))))), \\ & \substack{Q \in \mathcal{P}, \\ P \in S.} \end{aligned}$$

<sup>3</sup> Własność wyznaczona na podstawie: [Fertis, Baes, Lüthi, 2012].

**Własność 2<sup>4</sup>.** Zakładamy, że zbiór scenariuszy  $S$  jest słabo-\* zwarty oraz dla każdego  $P \in S$  ograniczenie miary ryzyka  $\rho_P$  do  $L^1(\Omega, F, P)$  jest rzeczywistą koherentną miarą ryzyka. Zapiszmy jako  $Q_P$  podzbiór zbioru  $P$ , z twierdzenia 2. Jeżeli  $Q_P$  jest niepusty, słabo-\* zwarty oraz wypukły, to odporna miara ryzyka  $\rho_S^R : L^1(\Omega, F, P) \rightarrow \mathbf{R}$  jest rzeczywista i koherentna. Dla każdego  $X \in L^1(\Omega, F, P)$ , mamy:

$$\rho_S^R(X) = \max_Q E_Q[-X],$$

$$\text{s.t: } Q \in \text{cl}(\text{conv}(\bigcup_{P \in S} Q_P)),$$

oraz:

$$\partial \rho_S^R(X) = \arg \max_Q E_Q[-X],$$

$$\text{s.t: } Q \in \text{cl}(\text{conv}(\bigcup_{P \in S} Q_P)).$$

Należy zauważyć, że każda koherentna miara ryzyka  $\rho_P$  jest odporną miarą ryzyka. Rozważmy, że nominalna rodzina miar ryzyka zawiera oczekiwanie miary ryzyka i zestaw scenariuszy, które mają być testem zbioru prawdopodobieństwa  $Q_P$ .

## 2. Odporna warunkowa wartość zagrożona – *RCVaR*

Zapiszemy, wykorzystując przedstawione w punkcie poprzednim definicje, odporną warunkową wartość zagrożoną (Robust Conditional Value-at-Risk, *Robust CVaR*) jako odporną miarę ryzyka odpowiadającą warunkowej wartości zagrożonej (Conditional Value-at-Risk, *CVaR*), gdy zbiór scenariuszy jest zorganizowany w dwóch etapach, a także losowość jest ograniczona w rozkładzie prawdopodobieństwa do drugiego etapu. Zapiszemy, jak obliczyć odporne *CVaR* dla pojedynczego aktywu oraz dla portfeli, które optymalizują odporny *CVaR* [Fertis, Baes, Lüthi, 2012]. Złożoność zaproponowanych algorytmów jest niemal taka sama, jak złożoność odpowiadających im algorytmów *CVaR*. Wykorzystując definicję *CVaR*, zapisujemy odporny odpowiednik – *RCVaR*.

---

<sup>4</sup> Ibid.

**Definicja 4.** Przyjmujemy stałą  $\beta \in (0,1)$  oraz dla każdego  $X \in L^1(\Omega, F, P)$ :

$$\begin{aligned} CVaR_p(X) &= \max_{Q \in \mathcal{P}} E_Q[-X], \\ Q &\leq \frac{P}{1-\beta}, \\ Q &\in \mathcal{P} \end{aligned}$$

lub równoważnie:

$$\begin{aligned} CVaR_p(X) &= \max_{G \in L^{\infty}_+(\Omega, F, P)} E_p[-GX], \\ G &\leq \frac{P}{1-\beta} \cdot \frac{dP}{d\mathbf{P}}, \\ E_p[G] &= 1. \end{aligned}$$

Zbiór  $\mathcal{P}$  wykorzystany powyżej zdefiniowano w (1). Zdefiniujemy zbiór scenariuszy  $S \subseteq \mathcal{P}$ . Let  $\{P_1; \dots; P_r\} \subseteq \mathcal{P}$  oraz zapiszemy:

$$\Delta_r = \left\{ \xi \in \mathbb{R}_+^r \mid \sum_{i=1}^r \xi_i = 1 \right\},$$

standardowy  $(r-1)$ -wymiarowy sympleks. Ustalmy  $\xi_0 \in \Delta_r$ , normę  $\|\cdot\|$  na  $\mathbb{R}^r$ ,  $\phi > 0$  oraz ustalmy zbiór:

$$S = \left\{ \sum_{i=1}^r \xi_i P_i \mid \xi \in \Delta_r, \|\xi - \xi_0\| \leq \phi \right\}.$$

Możemy rozważyć bardziej ogólnie, że  $\xi$  jest ograniczony do domkniętego, a tym samym zwartego podzbioru  $\Xi \subseteq \Delta_r$ . Możemy zapisać, że:

$$\begin{aligned} CVaR_{\sum_{i=1}^r \xi_i P_i}(X) &= \max_{G \in L^{\infty}_+(\Omega, F, P)} E_p[-GX], \\ G &\leq \frac{P}{1-\beta} \cdot \sum_{i=1}^r \xi_i \frac{dP}{d\mathbf{P}}, \\ E_p[G] &= 1 \end{aligned}$$



Odwzorowanie  $\xi \rightarrow \sum_{i=1}^r \xi_i \frac{dP}{d\mathbf{P}}$  jest ciągłe, jako liniowa funkcja pomiędzy dwoma skończenie wymiarowymi przestrzeniami. Zatem  $CVaR_{\sum_{i=1}^r \xi_i P_i}(X)$  jest ciągłą funkcją  $\xi$ .

**Definicja 5.** Zgodnie z definicją 3., odporny  $CVaR$  odpowiadający zbiorowi scenariuszy  $S$  jest definiowany jako:

$$RCVaR(X) = \sup_{\xi \in \Xi} CVaR_{\sum_{i=1}^r \xi_i P_i}(X) = \max_{\xi \in \Xi} CVaR_{\sum_{i=1}^r \xi_i P_i}(X).$$

Powyższe maximum jest zawsze wyznaczone, ponieważ mamy  $\xi$  ze zbioru zwartego oraz  $CVaR_{\sum_{i=1}^r \xi_i P_i}(X)$  jest ciągłą funkcją  $\xi$ .

Łącząc definicję 4 oraz zbiór scenariuszy  $S$ , możemy zapisać  $RCVaR$  jako:

$$RCVaR_p(X) = \max E_p[-GX],$$

$$G \leq \frac{P}{1-\beta} \cdot \sum_{i=1}^r \xi_i \frac{dP}{d\mathbf{P}}$$

$$E_{\mathbf{P}}[G] = 1$$

$$|\xi| \in \Delta_r$$

$$\|\xi - \xi_0\| \leq \phi$$

$$G \in L_+^\infty(\Omega, F, P)$$

Powyższy problem optymalizacyjny jest wypukły. Jeżeli  $X$  jest dyskretną zmienną losową z  $n$  stanami (wartościami), to wybieramy  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ , co wpisuje ten problem w przestrzeń  $\mathbb{R}^{n+r}$ . Dodatkowo, jeżeli  $\|\cdot\|$  jest  $l_1$ -normą lub  $l_\infty$ -normą, problem jest liniowy, oraz jeżeli  $\|\cdot\|$  jest  $l_2$ -normą lub dowolną kwadratową normą, jest to problem programowania stożkowego drugiego rzędu. Jeżeli  $X$  jest ciągłą zmienną losową, problem zamienia się na nieskończenie wymiarowy. Może być rozwiązany aproksymacyjnie poprzez dyskretyzację rozkłady prawdopodobieństwa zmiennej losowej  $X$ .

### 3. Analiza empiryczna

Analiza obejmuje spółki wchodzące w skład WIG80Indeks. Indeks sWIG80 jest kontynuacją indeksu WIRR, obliczany jest od 31 grudnia 1994 roku i obejmuje 80 małych spółek notowanych na Głównym Rynku GPW. Wartość początkowa indeksu wynosiła 1000 pkt. Indeks sWIG80 jest indeksem typu cenowego, nie uwzględnia się w nim dochodów z tytułu dywidend. W indeksie sWIG80 nie uczestniczą spółki z indeksów WIG20 i mWIG40 oraz spółki zagraniczne notowane jednocześnie na GPW i innych rynkach o wartości rynkowej w dniu rankingu powyżej 100 mln euro. Udział jednej spółki w indeksie jest ograniczany do 10%. Wybrano spółki: Robyg, Elbobudowa, Agora, Abpl, Alumetal, Benefit, Midas, Monnari, Domdev, Vistula, Mennica, Rafako, Pep, Mci, Assecobs<sup>5</sup>. Wybrano zbiór spółek, dla których średnia stopa zwrotu w badanym okresie nie była ujemna.

**Tabela 1.** Parametry rozkładu stopy zwrotu spółek wchodzących w skład indeksu sWIG80

	Średnia	Odchylenie standardowe	Wariancja	Semi-wariancja	Semi-odchylenie standardowe	Semi-odchylenie przeciętne
Robyg	0,0010	0,0157	0,0002	0,0003	0,0170	0,0112
Elbudowa	0,0019	0,0194	0,0004	0,0011	0,0326	0,0134
Agora	0,0017	0,0221	0,0005	0,0009	0,0294	0,0156
Abpl	0,0002	0,0203	0,0004	0,0000	0,0035	0,0144
Alumetal	0,0005	0,0214	0,0005	0,0001	0,0089	0,0155
Benefit	0,0010	0,0177	0,0003	0,0003	0,0173	0,0128
Midas	0,0011	0,0180	0,0003	0,0004	0,0194	0,0130
Monnari	0,0016	0,0253	0,0006	0,0007	0,0272	0,0176
Domdev	0,0009	0,0218	0,0005	0,0002	0,0154	0,0156
Vistula	0,0016	0,0193	0,0004	0,0007	0,0266	0,0147
Mennica	0,0001	0,0155	0,0002	0,0000	0,0011	0,0112
Rafako	0,0011	0,0182	0,0003	0,0003	0,0183	0,0127
Pep	-0,0011	0,0214	0,0005	0,0003	0,0182	0,0136
Mci	0,0003	0,0190	0,0004	0,0000	0,0050	0,0137
Assecobs	0,0004	0,0233	0,0005	0,0001	0,0071	0,0157

Źródło: Obliczenia własne na podstawie danych z: [www 1].

Analizując parametry rozkładów (tabela 1), obserwujemy brak symetrii, zatem przeprowadzono testy zgodności z rozkładem normalnym (tabela 2) oraz wykonano wykresy kwantyl-kwantyl (tabela 3). Przeprowadzony został test Kołmogorowa–Smirnowa dla jednej próby. Test ten weryfikuje hipotezę zerową, która zakłada, że rozkład zmiennej jest zbliżony do normalnego.

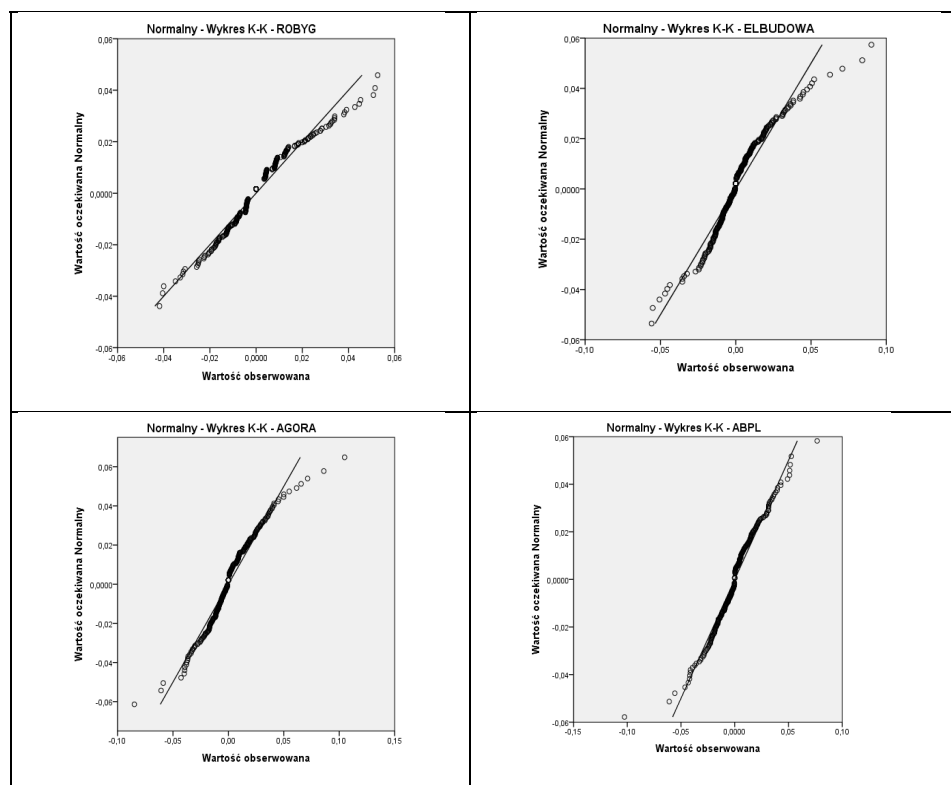
<sup>5</sup> Dane pobrano ze strony <http://www.gpwinfostrefa.pl> [www 1] za okres od 2.01.2015 r. do 26.02.2016 roku.

Tabela 2. Wyniki testu zgodności Kołmogorowa–Smirnowa

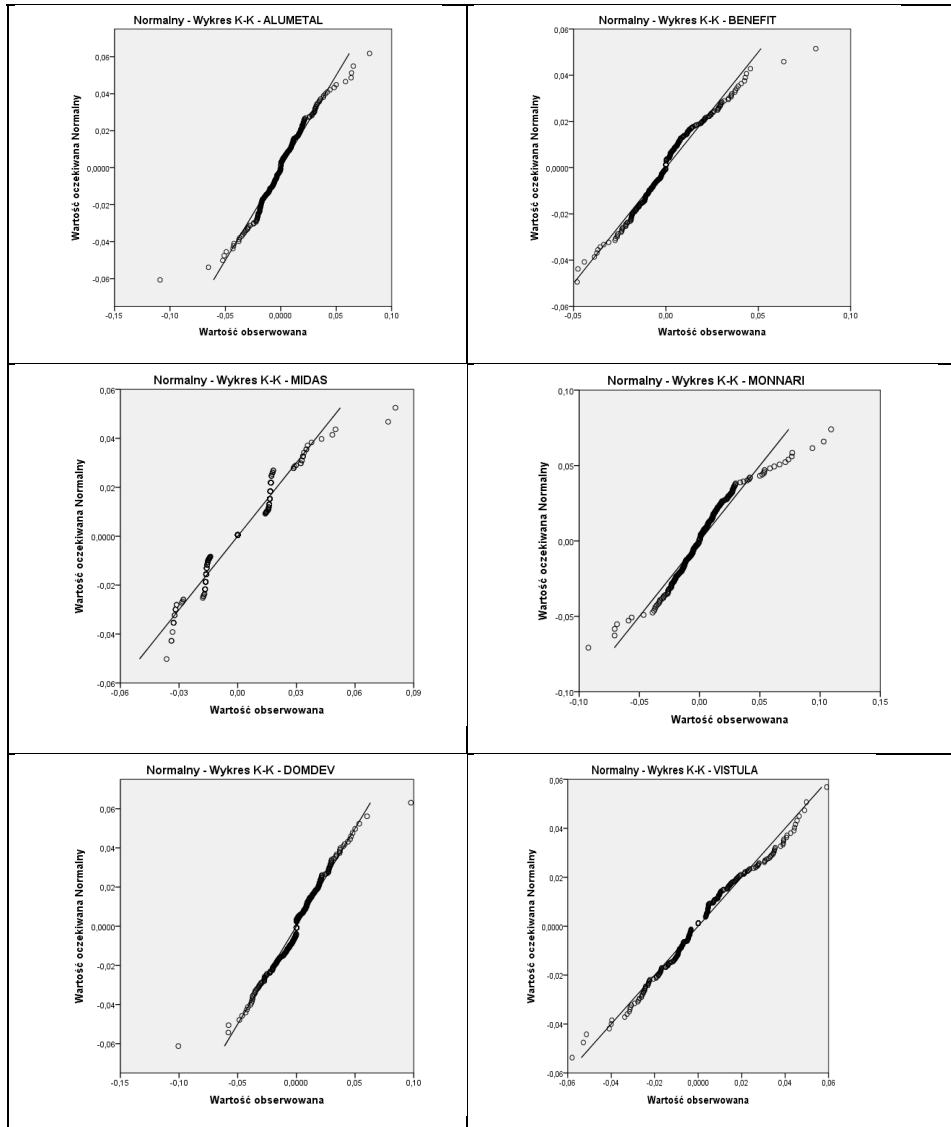
Spółka	Wartość Z	Istotność p	Wniosek
Robyg	4,586	0,000	odrzucaamy hipotezę $H_0$
Elbudowa	6,047	0,000	odrzucaamy hipotezę $H_0$
Agora	5,199	0,000	odrzucaamy hipotezę $H_0$
Abpl	6,087	0,000	odrzucaamy hipotezę $H_0$
Alumetal	6,432	0,006	odrzucaamy hipotezę $H_0$
Benefit	5,854	0,000	odrzucaamy hipotezę $H_0$
Midas	7,840	0,000	odrzucaamy hipotezę $H_0$
Monnari	5,445	0,000	odrzucaamy hipotezę $H_0$
Domdev	4,817	0,000	odrzucaamy hipotezę $H_0$
Vistula	3,698	0,000	odrzucaamy hipotezę $H_0$
Mennica	5,634	0,000	odrzucaamy hipotezę $H_0$
Rafako	7,483	0,000	odrzucaamy hipotezę $H_0$
Pep	7,746	0,000	odrzucaamy hipotezę $H_0$
Mci	7,733	0,015	odrzucaamy hipotezę $H_0$
Assecobs	7,730	0,000	odrzucaamy hipotezę $H_0$

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych z: [www 1].

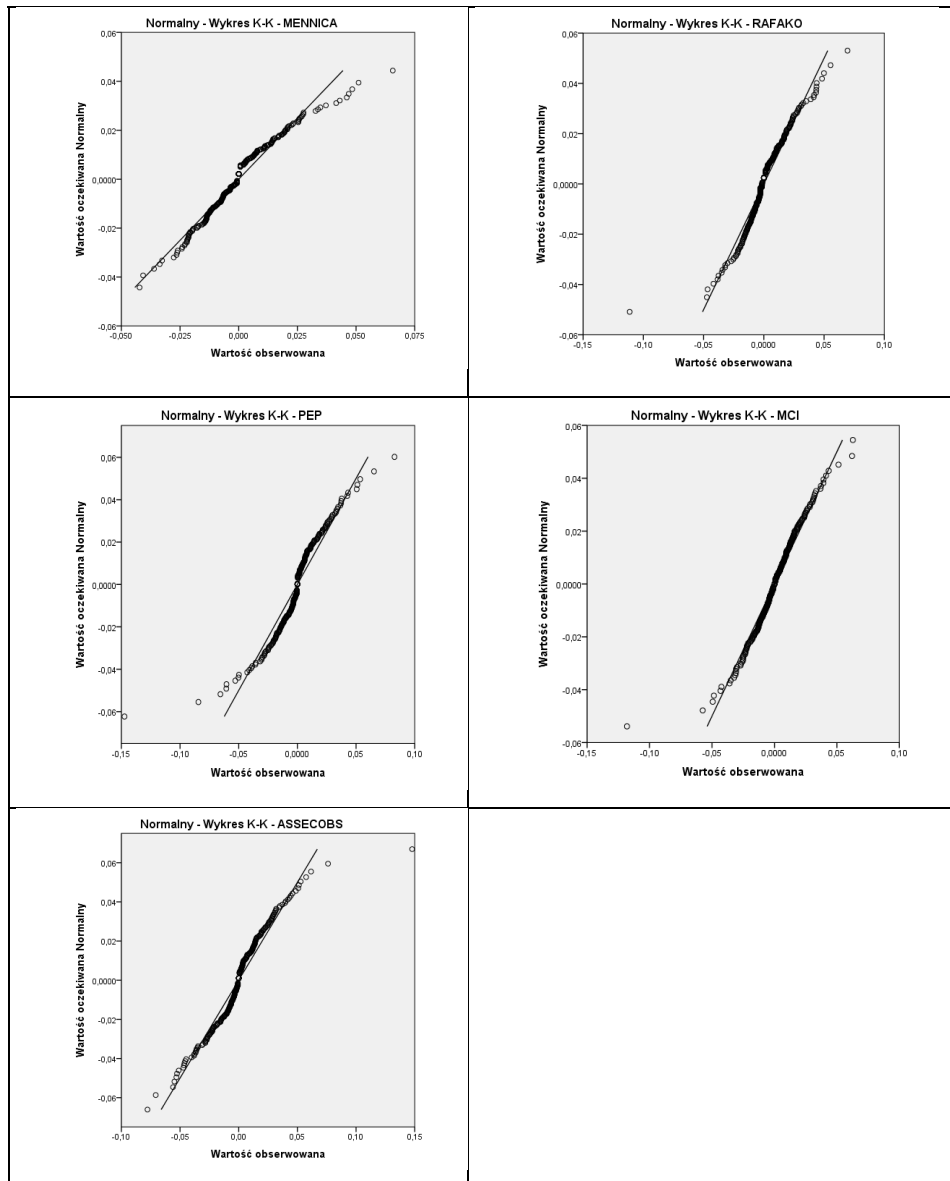
Tabela 3. Wykresy kwantyl-kwantyl stóp zwrotu akcji



cd. tabeli 3



cd. tabeli 3



Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych z: [www 1].

Tabela 4. Wartości CVaR stopy zwrotu dla wybranej grupy spółek

#I	ROB	ELB	AGO	ABP	ALU	BEN	MID	MON	DOM	VIS	MEN	RAF	PEP	MCI	ASS
VAR <sub>R</sub> <sub>0,95</sub>	0,0248	0,0429	0,0363	0,0491	0,0351	0,0373	0,0328	0,0533	0,0368	0,0350	0,0209	0,0247	0,0341	0,0393	0,0292
CVaR <sub>R</sub> <sub>0,95</sub>	-0,0012	0,0022	0,0014	0,0005	0,0003	0,0012	-0,0007	0,0005	-0,0005	-0,0002	-0,0021	-0,0001	-0,0013	0,0001	-0,0005
VAR <sub>R</sub> <sub>0,99</sub>	0,0431	0,0852	0,0898	0,0566	0,0452	0,0427	0,0399	0,0955	0,0508	0,0471	0,0354	0,0497	0,0516	0,0623	0,0470
CVaR <sub>R</sub> <sub>0,99</sub>	0,0003	0,0050	0,0040	0,0030	0,0022	0,0032	0,0011	0,0042	0,0017	0,0018	-0,0007	0,0017	0,0008	0,0025	0,0008
# II															
VAR <sub>R</sub> <sub>0,95</sub>	0,0263	0,0268	0,0395	0,0320	0,0317	0,0353	0,0323	0,0294	0,0296	0,0447	0,0348	0,0314	0,0300	0,0288	0,0319
CVaR <sub>R</sub> <sub>0,95</sub>	-0,0023	-0,0003	-0,0018	-0,0033	-0,0030	0,0000	-0,0019	-0,0009	-0,0022	-0,0010	-0,0025	-0,0026	-0,0058	-0,0026	-0,0046
VAR <sub>R</sub> <sub>0,99</sub>	0,0465	0,0380	0,0523	0,0424	0,0527	0,0494	0,0442	0,0808	0,0504	0,0491	0,0489	0,0489	0,0471	0,0340	0,0437
CVaR <sub>R</sub> <sub>0,99</sub>	-0,0006	0,0019	0,0005	-0,0016	-0,0016	0,0020	-0,0002	0,0004	-0,0009	0,0007	-0,0016	-0,0006	-0,0036	0,0001	-0,0003
# III															
VAR <sub>R</sub> <sub>0,95</sub>	0,0307	0,0416	0,0299	0,0306	0,0326	0,0265	0,0169	0,0518	0,0335	0,0348	0,0266	0,0256	0,0302	0,0270	0,0443
CVaR <sub>R</sub> <sub>0,95</sub>	-0,0006	0,0022	0,0006	-0,0013	-0,0001	-0,0015	-0,0028	0,0005	-0,0005	-0,0002	-0,0015	0,0002	-0,0013	-0,0013	0,0003
VAR <sub>R</sub> <sub>0,99</sub>	0,0424	0,0542	0,0452	0,0429	0,0512	0,0334	0,0331	0,0843	0,0420	0,0419	0,0498	0,0346	0,0510	0,0384	0,0976
CVaR <sub>R</sub> <sub>0,99</sub>	0,0002	-0,0006	0,0009	-0,0024	-0,0020	-0,0011	-0,0013	-0,0032	-0,0001	0,0005	0,0003	-0,0014	0,0000	-0,0025	-0,0004
# IV															
VAR <sub>R</sub> <sub>0,95</sub>	0,0330	0,0326	0,0403	0,0313	0,0227	0,0296	0,0324	0,0523	0,0289	0,0350	0,0234	0,0309	0,0289	0,0211	0,0265
CVaR <sub>R</sub> <sub>0,95</sub>	-0,0001	-0,0046	-0,0027	-0,0026	-0,0028	-0,0031	-0,0005	-0,0044	-0,0028	-0,0030	-0,0022	-0,0003	-0,0057	-0,0031	-0,0039
VAR <sub>R</sub> <sub>0,99</sub>	0,0409	0,0485	0,0668	0,0359	0,0672	0,0467	0,0557	0,0674	0,0566	0,0394	0,0418	0,0447	0,0573	0,0306	0,0547
CVaR <sub>R</sub> <sub>0,99</sub>	0,0012	-0,0032	-0,0006	-0,0014	-0,0012	-0,0018	0,0011	-0,0021	-0,0013	-0,0016	-0,0010	0,0012	-0,0042	-0,0022	-0,0021

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych z: [www 1].

Analizowany zbiór spółek nie ma rozkładu normalnego, oczekiwana stopa zwrotu jest nieujemna. Ogony badanych rozkładów mają liczne obserwacje odstające (wykresy w tabeli 3). Zatem dalszą analizę należy przeprowadzić z wykorzystaniem miar kwantylowych, do czego wybieramy *CVaR* (tabela 4). W tabeli zapisano wartości *CVaR* dla dwóch poziomów ufności 0,95 oraz 0,99, dla wybranych losowo czterech scenariuszy (#I-#IV), a następnie wyznaczono *RCVaR* (tabela 5). *RCVaR* zgodnie z definicją jest to najlepszy z najgorszych średnich oczekiwanych wyników po ogonie rozkładu stopy zwrotu rozkładu.

**Tabela 5.** Wartości *RCVaR* stopy zwrotu dla wybranej grupy spółek

Nazwa spółki	<i>RCVaR</i> <sub>0,95</sub>	<i>RCVaR</i> <sub>0,99</sub>
Robyg	-0,0001	0,0012
Elbudowa	0,0022	0,0050
Agora	0,0014	0,0040
Abpl	0,0005	0,0030
Alumetal	0,0003	0,0022
Benefit	0,0012	0,0032
Midas	-0,0005	0,0011
Monnari	0,0005	0,0042
Domdev	-0,0005	0,0017
Vistula	-0,0002	0,0018
Mennica	-0,0015	0,0003
Rafako	0,0002	0,0017
Pep	-0,0013	0,0008
Mci	0,0001	0,0025
Assecobs	0,0003	0,0008

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych z: [www 1].

Kolejnym etapem analizy była analiza portfelowa. Sporządzono klasyczny model Markowitza. Uzyskano maksymalną stopę zwrotu równą 0,0014, przy odchyleniu standardowym równym 0,01. W skład tego portfela weszło osiem analizowanych spółek (tabela 6).

**Tabela 6.** Konstrukcja portfela Markowitza

Nazwa spółki	R	S	w <sub>i</sub>
1	2	3	4
Robyg	0,0010	0,0157	0,08
Elbudowa	0,0019	0,0194	0,15
Agora	0,0017	0,0221	0,15
Abpl	0,0002	0,0203	0,00
Alumetal	0,0005	0,0214	0,00
Benefit	0,0010	0,0177	0,08
Midas	0,0011	0,0180	0,15
Monnari	0,0016	0,0253	0,12
Domdev	0,0009	0,0218	0,00
Vistula	0,0016	0,0193	0,15
Mennica	0,0001	0,0155	0,00

cd. tabeli 6

<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>
Rafako	0,0011	0,0182	0,12
Pep	-0,0011	0,0214	0,00
Mci	0,0003	0,0190	0,00
Assecobs	0,0004	0,0233	0,00

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych z: [www 1].

Bazując na tych wstępnych wynikach, które otrzymano przy niespełnionym założeniu o zgodności z rozkładem normalnym stóp zwrotu, zastąpiono to postępowanie analizą portfelową zgodną z *CVaR*, a następnie wyznaczono *RCVaR*. Ograniczono zbiór spółek, przyjmując do analizy portfelowej te, które w portfelu Markowitza miały udziały powyżej 10%. Założenie to również włączono do ograniczeń w modelu *RCVaR*. Kolejne portfele miały następujące kryteria dodatkowe, co do składu portfela: a)  $0,1 < w_i < 0,4$ , b)  $0,15 < w_i < 0,4$ , c)  $0,2 < w_i < 0,4$ . Dodatkowe założenie zostało przyjęte celem uzyskania stabilnych rozwiązań zadań optymalizacyjnych.

Tabela 7. Portfele I – skład oraz *RCVaR*

	ELBUDOWA	AGORA	MIDAS	MONNARI	VISTULA	RAFAKO	<i>RCVaR</i> <sub>0,95</sub>
$w_i$	0,17	0,17	0,17	0,17	0,17	0,17	0,0404
$w_i$	0,28	0,32	0,10	0,10	0,10	0,10	0,0803
$w_i$	0,25	0,15	0,15	0,15	0,15	0,15	0,0536

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych z: [www 1].

Wartości *RCVaR* dla zbudowanych portfeli dla dwóch poziomów ufności 0,95 oraz 0,99 zapisano w tabelach 7 i 8. Wartości *RCVaR* zgodnie z definicją to najlepsze z najgorszych średnich oczekiwanych wyników, przy uwzględnieniu wartości odstających w ogonie rozkładu portfela dla wybranych scenariuszy.

Tabela 8. Portfele II – skład oraz *RCVaR*

	Elbudowa	Agora	Midas	Monnari	Vistula	Rafako	<i>RCVaR</i> <sub>0,99</sub>
$w_i$	0,17	0,17	0,17	0,17	0,17	0,17	0,0038
$w_i$	0,40	0,10	0,10	0,20	0,10	0,10	0,0046
$w_i$	0,25	0,15	0,15	0,15	0,15	0,15	0,0040

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych z: [www 1].

## Podsumowanie

W niniejszym artykule omówiono odporną miarę ryzyka w odniesieniu do rodziny nominalnych miar ryzyka oraz niepewnego zbioru miar prawdopodobieństwa, które indukują proces losowy. Wskazano na własności i strukturę od-



pornych miar ryzyka dla rodziny nominalnych miar ryzyka, zawierającej ryzyko wypukłe lub koherentne. Wykorzystano odporną miarę ryzyka  $RCVaR$ , odpowiadającą  $CVaR$  w analizie portfelowej na przykładzie grupy aktywów notowanych na GPW w Warszawie.

## Literatura

- Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D. (1999), *Coherent Risk Measures*, "Mathematical Finance", No. 9(3), s. 203-228.
- Bertsimas D., Pachamanova D. (2008), *Robust Multiperiod Portfolio Management with Transaction Costs*, "Computers and Operations Research", No. 35(1), Special issue on Applications of OR in Finance s. 3-17.
- Bertsimas D., Brown D. (2009), *Constructing Uncertainty Sets for Robust Linear Optimization*, "Operations Research", No. 57(6), s. 1483-1495.
- Donnelly C., Embrechts P. (2010), *The Devil is in the Tails: Actuarial Mathematics and the Subprime Mortgage Crisis*, "ASTIN Bulletin", No. 40(1), s. 1-33.
- Fertis A., Baes M., Lüthi H.-J. (2012), *Robust Risk Management*, "European Journal of Operational Research", No. 222, s. 663-672.
- Föllmer H., Schied A. (2002), *Convex Measures of Risk and Trading Constraints*, "Finance & Stochastics", No. 6(4), s. 429-447.
- Lüthi H.-J., Doege J. (2005), *Convex Risk Measures for Portfolio Optimization and Concepts of Flexibility*, "Mathematical Programming", Series B 104, s. 541-559.
- Markowitz H.M. (1952), *Portfolio Selection*, "Journal of Finance", No. 7, s. 77-91.
- RiskMetrics (1995), *Technical Document*, Technical report, Morgan Guarantee Trust Company, Global Research, New York.
- Rockafellar R. (1970), *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton.
- Rockafellar R.T., Uryasev S. (2000), *Optimization of Conditional Value-at-Risk*, "The Journal of Risk", No. 2(3), s. 21-41.
- Shapiro A., Dentcheva D., Ruszczyński A. (2009), *Lectures on Stochastic Programming: Modeling and Theory*, SIAM, Philadelphia.
- Trzpiot G. (2007), *Decomposition of Risk and Quantile Risk Measures* [w:] „Dynamyczne Modele Ekonometryczne”, Prace Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu, s. 35-42.
- Trzpiot G. (2008), *Implementacja metodologii regresji kwantylowej w estymacji VaR*, Studia i Prace nr 9, Uniwersytet Szczeciński, Szczecin, s. 316-323.
- Trzpiot G. (2009a), *Application Weighted VaR in Capital Allocation*, "Polish Journal of Environmental Studies", Vol. 18, No. 5B, s. 203-208.
- Trzpiot G. (2009b), *Extreme Value Distributions and Robust Estimation*, "Folia Economica", nr 228, Acta Universitatis Lodziensis, Łódź, s. 85-92.

Trzpiot G. (2016), *Semi-Parametric Risk Measures*, „Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach”, nr 288(5), s. 108-120.

Trzpiot G., Kręzolek D. (2009), *Quantiles Ratio Risk Measures for Stable Distributions Models in Finance*, „Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Akademii Ekonomicznej w Katowicach”, nr 53, s. 109-120.

Trzpiot G., Majewska J. (2009), *Sensitivity Analysis of Some Robust Estimators of Volatility*, „Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Akademii Ekonomicznej w Katowicach”, nr 53, s. 91-108.

Trzpiot G., Majewska J. (2010), *Estimation of Value at Risk: Extreme Value and Robust Approaches*, „Operation Research and Decisions”, Vol. 20, No. 1, s. 131-143.

[www 1] [www.gpwinforefa.pl](http://www.gpwinforefa.pl) (dostęp: 14.03.2016).

### ROBUST RISK MEASURES

**Summary:** Estimating the probabilities by which different events might occur is usually a difficult problem. Usually probabilities change over time, leading to a very difficult to evaluated of the risk induced by any particular decision. For a given set of probability measures and a set of nominal risk measures, we describe robust risk measure as the worst possible of risks when each of probability measures may occur. We describe some properties of those of our nominal risk measures, such as convexity or coherence. We use a robust version of the Conditional Value-at-Risk (*CVaR*). We applied Robust *CVaR* (*RCVaR*) using data from the Warsaw Stock Exchange.

**Keywords:** risk measures, robust risk measures, robust *CVaR* (*RCVaR*).