



### Grażyna Trzpiot

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach  
Wydział Informatyki i Komunikacji  
Katedra Demografii i Statystyki Ekonomicznej  
grazyna.trzpiot@ue.katowice.pl

### Kamila Twaróg

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach  
Wydział Informatyki i Komunikacji  
Katedra Demografii i Statystyki Ekonomicznej  
kamila.twarog@edu.uekat.pl

## ZASTOSOWANIE DRZEW DECYZYJNYCH W OCENIE EFEKTYWNOŚCI INWESTYCJI PORTFELOWYCH

**Streszczenie:** Inwestycje na rynku kapitałowym nieodłącznie wiążą się z podejmowaniem decyzji. Inwestorzy, którzy alokują środki na rynkach kapitałowych, stosują różnorodne metody wspierające efektywność podejmowanych przez nich decyzji inwestycyjnych. Celem artykułu jest zaprezentowanie wykorzystania alternatywnej metody – drzew decyzyjnych – w ocenie efektywności inwestycji portfelowych oraz wartości dodanej płynącej z zastosowania omawianej metody. W artykule podjęto badanie, które pokazuje możliwe powiązanie klasycznej analizy portfelowej z szerszą analizą makroekonomiczną, akcentując wpływ otoczenia makroekonomicznego na wynik inwestycji portfelowej. Próbę badawczą w analizie empirycznej stanowi szereg dziennych logarytmicznych stóp zwrotu dla 15 spółek wchodzących w skład indeksu sektorowego WIG-deweloperzy notowanego na Warszawskiej Giełdzie Papierów Wartościowych.

**Słowa kluczowe:** pomiar ryzyka, inwestycje portfelowe, drzewa decyzyjne.

**JEL Classification:** C44, C40, G11.

### Wprowadzenie

Inwestycje na rynku kapitałowym nieodłącznie wiążą się z podejmowaniem decyzji. Inwestorzy, którzy alokują środki na rynkach kapitałowych, stosują różnorodne metody wspierające efektywność podejmowanych przez nich decyzji inwestycyjnych. W ogólnym rozumieniu efektywność oznacza rezultat podjętych działań, który w ekonomii wyrażony jest w postaci relacji efektów do poniesionych nakładów. Relacja ta pozwala na zweryfikowanie, czy podjęte decy-

zje inwestycyjne były efektywne. W odniesieniu do rynku kapitałowego efektywność wyraża się poprzez zdolność do pomnażania aktywów. W literaturze przedmiotu metody oceny efektywności inwestycji portfelowych są szeroko omawiane [Jajuga, Jajuga 2012; Ostrowska, 2014; Tarczyński, 2012; Tarczyński, Luniewska, 2004]. W artykule pojęcie efektywności rozumiane jest poprzez wzrost wartości stopy zwrotu zbudowanego portfela w obliczu podejmowanych decyzji inwestycyjnych.

Celem pracy jest zaprezentowanie wykorzystania alternatywnej metody – drzew decyzyjnych – w ocenie efektywności inwestycji portfelowych oraz wartości dodanej płynącej z zastosowania omawianej metody.

## 1. Drzewa decyzyjne

Drzewa decyzyjne są modelami i jako takie są one uproszczeniem rzeczywistego problemu. Uproszczenie to jest najważniejszą zaletą procesu modelowania, gdyż sprzyja zrozumieniu sytuacji, w czym zwykle przeszkadzają liczne szczegóły i złożona struktura zadania [Goodwin, Wright, 2015, s. 138]. Drzewa decyzyjne posiadają wiele zalet. W szczególności istotny jest fakt, iż drzewa decyzyjne przedstawiają czytelną wizualizację nie tylko dla profesjonalistów. Ponadto istnieje łatwa możliwość przejścia od drzew decyzyjnych do reguł decyzyjnych [Rokach, Maimon, 2015] oraz oceny ich wrażliwości [Kamiński, Jakubczyk, Szufel, 2017].

W drzewach decyzyjnych stosowane są dwa symbole – czworokąt oraz koło. Czworokąt oznacza węzeł decyzyjny. Ponieważ każda z gałęzi odchodząca z węzła decyzyjnego stanowi jedną z możliwości wyboru, decydent w tym miejscu wybiera, w którym kierunku chce podążać. Koło oznacza węzeł losowy. Gałęzie odchodzące z węzła losowego są oznaczone oszacowanym przez decydenta prawdopodobieństwem, że dalszy przebieg procesu decyzyjnego zgodny będzie ze wskazanym kierunkiem.

Drzewa decyzyjne składają się zazwyczaj z kilku strategii. Stosowaną do ustalenia optymalnej strategii przy użyciu drzewa decyzyjnego jest strategia „analiza do końca”. W metodzie tej drzewo decyzyjne analizowane jest od strony prawej do lewej, w pierwszej kolejności rozważając decyzje, które następują później.

Połączenie subiektywnej wiedzy *a priori* z informacją pochodzącą z obserwowalnych danych, przy wykorzystaniu twierdzenia Bayesa, stanowi podstawę metod bayesowskich. Twierdzenie Bayesa pozwala na przekształcenie posiadanej informacji przed obserwacją oraz nową informację zawartą w empirycznych danych w prawdopodobieństwo *a posteriori*.

Jeżeli  $\{B_j\}_{j \in I}$ , to przeliczalne jest rozbitcie  $\Omega$  na zdarzenia o dodatnim prawdopodobieństwie oraz  $P(A) > 0$ , wówczas dla dowolnego  $i \in I$  otrzymujemy [Grzenda, 2012, s. 16]:

$$P(B_i | A) = \frac{P(A | B_i)P(B_i)}{\sum_{j \in I} P(A | B_j)P(B_j)}, \quad (1)$$

gdzie:

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  – przestrzeń zdarzeń elementarnych,

$A, B$  – zdarzenie elementarne,

$i = 1, \dots, n$ ,

$P(B_i)$  – prawdopodobieństwa *a priori* (z góry, przed doświadczeniem),

$P(B_i | A)$  – prawdopodobieństwa *a posteriori* (po doświadczeniach).

Graficzną ilustracją zaprezentowanego powyżej twierdzenia jest drzewo decyzyjne.

## 2. Analiza empiryczna

W artykule podjęto badanie, które pokazuje możliwe powiązanie klasycznej analizy portfelowej z szerszą analizą makroekonomiczną, akcentując wpływ otoczenia makroekonomicznego na wynik inwestycji portfelowej. Analiza makroekonomiczna w klasycznym badaniu to zbudowany model ekonometryczny (w szczególności model arbitrażu cenowego) albo analiza fundamentalna spółek z portfela [Tarczyński, 2012]. Celem przeprowadzonej analizy empirycznej jest zobrazowanie możliwości wykorzystania drzew decyzyjnych do oceny efektywności inwestycji portfelowych. Próbę badawczą stanowił szereg dziennych logarytmicznych stóp zwrotu obliczanych na podstawie kursu zamknięcia dla 15 spółek wchodzących w skład indeksu sektorowego WIG-deweloperzy notowanego na Warszawskiej Giełdzie Papierów Wartościowych. Długość analizowanego szeregu to 289 obserwacji z okresu 15.01.2015 – 26.02.2016 r.<sup>1</sup>

### 2.1. Portfele inwestycyjne

Na podstawie szeregu danych zbudowano dwa portfele inwestycyjne. Portfel 1. został skonstruowany w oparciu o maksymalizację oczekiwanej stopy zwrotu z portfela oraz przy założeniu, że udział jednej spółki w portfelu nie mo-

<sup>1</sup> Punktem wyjścia do przeprowadzonej analizy są oferty inwestycyjne kierowane do indywidualnych inwestorów, np. oferta EstiGroup obligacji dostępnych do nabycia w czerwcu 2017 r. (emitent: 4TEM, branża: deweloperska, oprocentowanie: 8%, okres: 24 miesiące).

że przekroczyć 30%. Wykorzystane dla portfela 1. klasyczne podejście Markowitza nie zawsze oddaje charakter mierzonego ryzyka, zatem w celu uogólnienia problematyki pomiaru ryzyka portfel 2. został skonstruowany w oparciu o kryterium ograniczające dla kwantylowej miary ryzyka, jaką jest minimalizacja warunkowej wartości zagrożonej (*CVaR*) [Jajuga, Jajuga, 2012; Ostrowska, 2014; Trzpiot (red.), 2010]. Zastosowano metodę symulacji historycznej wykorzystującą historyczne stopy zwrotu portfela akcji dla horyzontu jednodniowego. Udział spółek wchodzących w skład poszczególnych portfeli inwestycyjnych zaprezentowano w tabelach 1 i 2.

**Tabela 1.** Udział spółek wchodzących w skład portfela 1.

Spółka	Udział w portfelu
ORIONINV	30%
ALTA	30%
JWCONSTR	30%
INPRO	10%

Źródło: Opracowanie własne.

Wartość oczekiwana stopy zwrotu z portfela 1. wynosi 0,023%. Stopy zwrotu zbudowanego portfela 1. odchylają się od wartości średniej o przeciętnie 13,7%.

**Tabela 2.** Udział spółek wchodzących w skład portfela 2.

Spółka	Udział w portfelu
ORCOGROUP	1,1%
EDINVEST	0,4%
WIKANA	7,7%
ORIONINV	0,4%
ALTA	4,1%
CELTIC	1,0%
WARIMPEX	8,1%
VANTAGE	21,8%
BLACKLION	4,1%
INPRO	13,6%
RONSON	12,5%
BBIDEV	10,4%
IIAAV	14,8%

Źródło: Opracowanie własne.

Wartość oczekiwana stopy zwrotu z portfela 2. wynosi 0,00718%. Stopy zwrotu zbudowanego portfela 2. odchylają się od wartości średniej o przeciętnie 0,487%. *CVaR* wynosi 0,0186.

## 2.2. Zmienne makroekonomiczne

Potencjalny zysk każdego z portfeli inwestycyjnych w znacznym stopniu zależy od czynników ryzyka, które w realny sposób wpływają na zmiany kursu akcji spółek wchodzących w skład portfela. Postanowiono zatem rozszerzyć analizę empiryczną o uwzględnienie zmiennych makroekonomicznych. W przeprowadzonej analizie wykorzystano następujące zmienne makroekonomiczne: kurs EUR/PLN, cenę ropy naftowej oraz inflację. Wykorzystane czynniki odzwierciedlają zarówno ryzyko systematyczne (stałe) – inflacja, jak również ryzyko specyficzne – cena ropy naftowej oraz kurs EUR/PLN.

W analizie empirycznej rozważono dwa zdarzenia:

$S_1$ : {wartość czynnika wzrośnie bądź pozostanie bez zmian},

$S_2$ : {wartość czynnika spadnie}.

Początkowo przyjęto, że inwestor nie posiada dodatkowych informacji pochodzących z próby statystycznej. Na podstawie wstępnych informacji wyznaczono prawdopodobieństwa *a priori* dla poszczególnych stanów natury  $S_j$ , a więc rozkład niezależny od wyników eksperymentu. W tabeli 3 zaprezentowano rozkład prawdopodobieństw występowania rozważanych stanów natury (*a priori*).

**Tabela 3.** Rozkład prawdopodobieństw występowania stanów natury

Czynnik	Stan natury	
	S1	S2
Kurs EUR/PLN	0,43	0,57
Cena ropy naftowej	0,57	0,43
Inflacja	0,36	0,64

Źródło: Opracowanie własne.

Ponadto założono, że inwestor posiadający portfel inwestycyjny o wartości 10 000 zł rozważa podjęcie jednej z następujących decyzji (akcji):

$D_1$ : sprzedaż portfela,

$D_2$ : zwiększenie wartości portfela o 10% (doinwestowanie – 11 000zł), a następnie jego sprzedaż.

Kolejno przed podjęciem decyzji do analizy dołączono dodatkową (próbkową) informację ( $I$ ). Aby połączyć wstępne informacje z tymi uzyskanymi z próby, obliczono prawdopodobieństwa warunkowe (prawdopodobieństwa *a posteriori*), zgodnie z definicją [Trzpiot, 2011, s. 108]:

$$P(S_1 / I) = P(S_1 \cap I) / P(I). \quad (2)$$

Prawdopodobieństwo to wyznaczono w dwóch krokach:

$$P(S_1 \cap I) = P(I/S_1)/P(S_1), \quad (3)$$

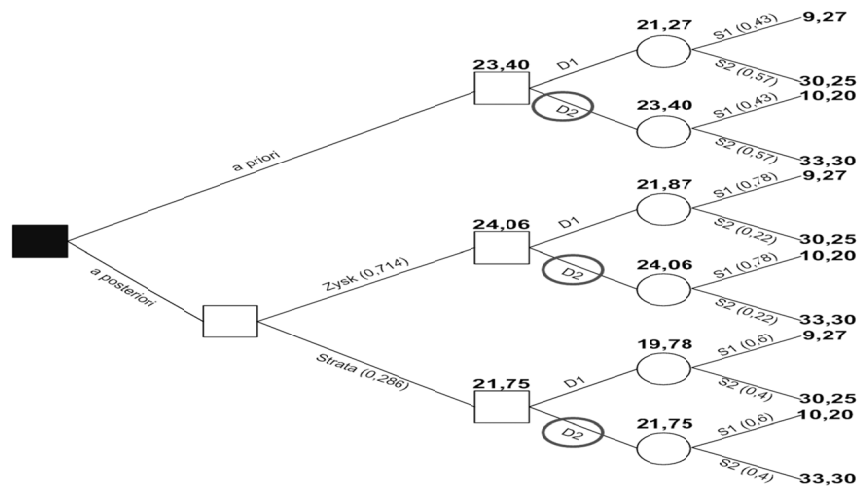
$$P(I) = P(I \cap S_1) + P(I \cap S_2). \quad (4)$$

Z uwagi, iż zdarzenia  $S_1$  i  $S_2$  są rozłączne oraz tworzą układ zupełny zdarzeń:

$$P(I \cap S_2) = P(I/S_2)/P(S_2). \quad (5)$$

### 2.3. Budowanie drzew decyzyjnych

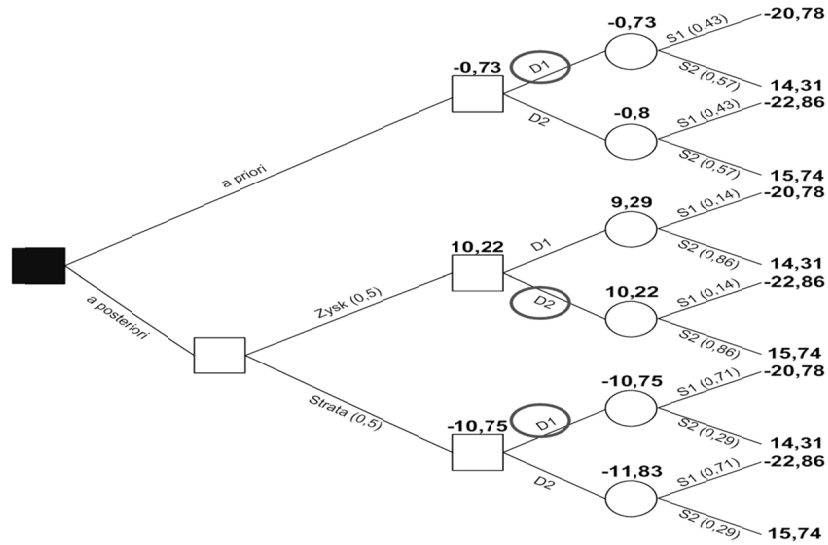
Wykorzystując wyznaczone prawdopodobieństwa *a priori* oraz *a posteriori* (informację dodatkową stanowiły szeregi czasowe wybranych zmiennych makroekonomicznych z przesunięciem kilku miesięcy<sup>2</sup>), zilustrowano problem decyzyjny za pomocą drzew decyzyjnych [Trzpiot, 2011, s. 122; Keller, Warrack, Bartel, 1988, s. 920) oraz na ich podstawie wybrano korzystniejszą dla inwestora decyzję (rys. 1-6).



**Rys. 1.** Drzewo decyzyjne dla portfela 1. z uwzględnieniem zmian kursu EUR/PLN

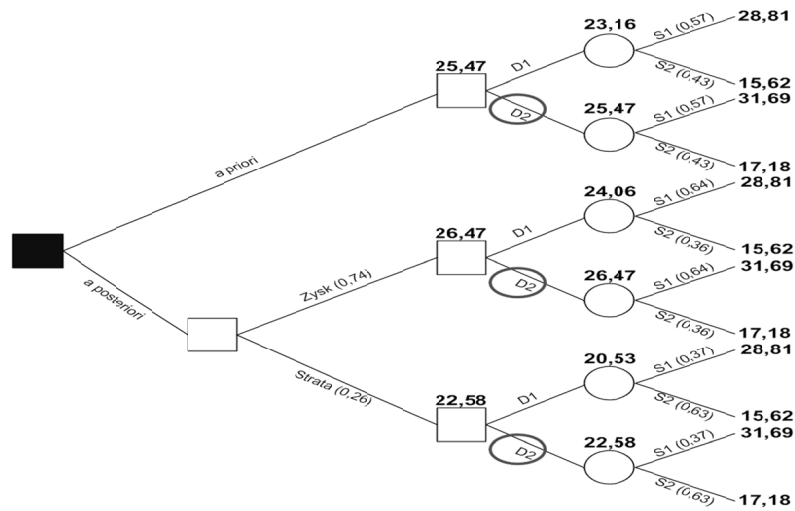
Źródło: Opracowanie własne.

<sup>2</sup> Informację dodatkową stanowiły szeregi czasowe wartości wybranych zmiennych makroekonomicznych, które mogą być wybrane do oceny portfela w okresie późniejszym z dowolnym przesunięciem czasowym.



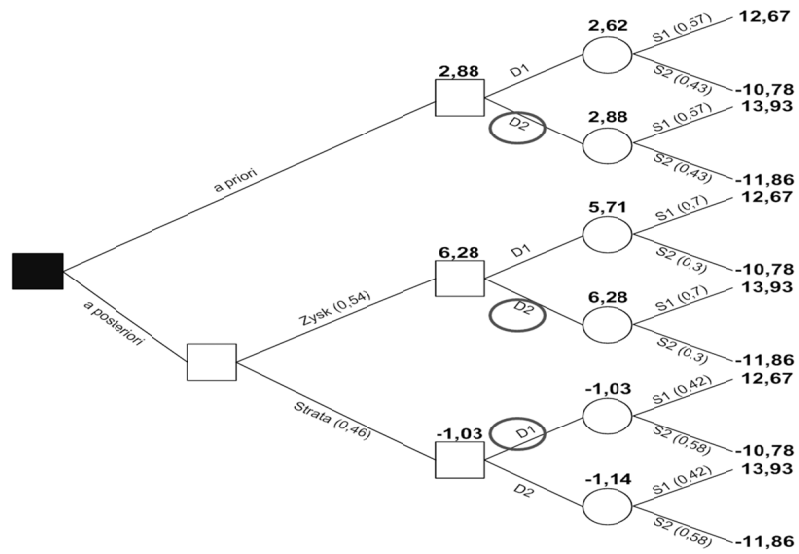
**Rys. 2.** Drzewo decyzyjne dla portfela 2. z uwzględnieniem zmian kursu EUR/PLN

Źródło: Opracowanie własne.



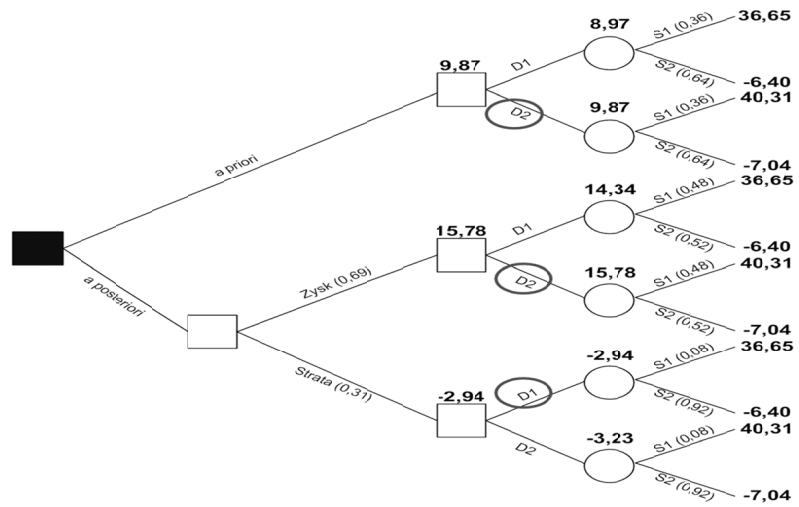
**Rys. 3.** Drzewo decyzyjne dla portfela 1. z uwzględnieniem zmian ceny ropy naftowej

Źródło: Opracowanie własne.



Rys. 4. Drzewo decyzyjne dla portfela 2. z uwzględnieniem zmian ceny ropy naftowej

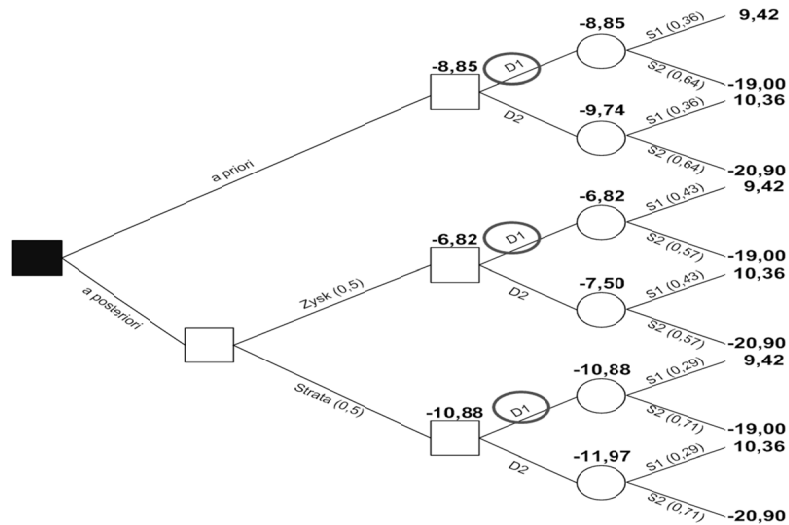
Źródło: Opracowanie własne.



Rys. 5. Drzewo decyzyjne dla portfela 1. z uwzględnieniem zmian inflacji

Źródło: Opracowanie własne.





**Rys. 6.** Drzewo decyzyjne dla portfela 2. z uwzględnieniem zmian inflacji

Źródło: Opracowanie własne.

### 3. Wartość oczekiwana informacji *a posteriori*

W zależności od podjętej decyzji oraz pojawiającego się stanu natury decydent otrzyma końcowy zysk lub stratę. Konsekwencje wyboru nazywane są wypłatą, która może być wartością dodatnią bądź ujemną. Wszystkie elementy problemu decyzyjnego mogą zostać zebrane w tabelę wypłat (tabela 4).

**Tabela 4.** Tabela wypłat problemu decyzyjnego

Akcje	Stany natury					
	$S_1$	$S_2$	...	$\dots S_j$	...	$\dots S_n$
$a_1$	$e_{11}$	$e_{12}$	...	$e_{1j}$	...	$e_{1n}$
$a_2$	$e_{21}$	$e_{22}$	...	$e_{2j}$	...	$e_{2n}$
...						
$a_m$	$e_{m1}$	$e_{m2}$	...	$e_{mj}$	...	$e_{mn}$
	$P(S_1)$	$P(S_2)$	...	$\dots P(S_j)$	...	$\dots P(S_n)$

Źródło: Trzpiot [2011, s. 11].

W celu sprawdzenia, jaki zysk bądź strata zostaną osiągnięte, w wyniku włączenia informacji pochodzącej z próby do analizy obliczono wartość oczekiwaną informacji *a posteriori*, wyrażoną wzorem [Trzpiot, 2011, s. 121]:

$$E(I) = \sum_{j=1}^n e_{ij}P(S_j / I) - \sum_{j=1}^n e_{ij}P(S_j). \quad (6)$$

W tabeli 5 umieszczono wartości oczekiwane informacji *a posteriori* dla poszczególnych portfeli z uwzględnieniem zmiennych makroekonomicznych.

**Tabela 5.** Wartości oczekiwane informacji *a posteriori*

Portfel	E(I)
1. z uwzględnieniem zmiany kursu EUR/PLN	0,00
2. z uwzględnieniem zmiany kursu EUR/PLN	<b>0,54</b>
1. z uwzględnieniem zmiany cen ropy naftowej	0,00
2. z uwzględnieniem zmiany cen ropy naftowej	0,05
1. z uwzględnieniem zmiany poziomu inflacji	0,09
2. z uwzględnieniem zmiany poziomu inflacji	0,00

Źródło: Opracowanie własne.

Wykorzystanie dodatkowych informacji z próby dotyczących zmian kursu EUR/PLN dla inwestora, którego portfel skonstruowany został w oparciu o kryterium minimalizacji *CVaR*, da inwestorowi dodatkowy zysk, jaki może otrzymać dzięki informacjom pochodzącym z próby na poziomie 0,54 zł.

## Podsumowanie

Zaprezentowane podejście wykorzystania drzew decyzyjnych w ocenie efektywności inwestycji portfelowych jest autorską propozycją i zdaniem Autora może być z powodzeniem użyte w procesie podejmowania decyzji inwestycyjnych, może także stanowić uzupełnienie klasycznych metod oceny efektywności inwestycji, które oparte są jedynie na informacji zawartej w próbie losowej i uniemożliwiają wprowadzenie dodatkowej informacji.

Uwzględnienie zmiennych makroekonomicznych rozszerza analizę o wpływ czynników ryzyka, które mają bezpośredni wpływ na zmiany cen akcji wchodzących w skład portfela. Ponadto wykorzystane w analizie podejście bayesowskie dało możliwość uwzględnienia w badaniu informacji spoza próby. Łącząc wiedzę z próby oraz spoza próby, inwestor może uzyskać większą skuteczność podejmowanych przez niego inwestycji portfelowych. Ostatecznie, graficzne przedstawienie problemu decyzyjnego za pomocą drzewa decyzyjnego w czytelny sposób wizualizuje inwestorowi możliwe drogi podejmowania decyzji oraz jego skutki.

## Literatura

- Goodwin P., Wright G. (2015), *Analiza decyzji*, przeł. P. Matyja, Oficyna Wolters Kluwer business, Warszawa.
- Grzenda W. (2012), *Wstęp do statystyki bayesowskiej*, Oficyna Wydawnicza Szkoła Główna Handlowa w Warszawie, Warszawa.

- Jajuga K., Jajuga T. (2012), *Inwestycje: instrumenty finansowe, aktywa finansowe, ryzyko finansowe, inżynieria finansowa*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Kamiński B., Jakubczyk M., Szufel P. (2017), *A Framework for Sensitivity Analysis of Decision Trees*, "Central European Journal of Operations Research", DOI: 10.1007/s10100-017-0479-6.
- Keller G., Warrack B., Bartel H. (1988), *Statistics for Management and Economics. A Systematic Approach*, Wadsworth Publishing Co., Belmont.
- Ostrowska E. (2014), *Portfel inwestycyjny klasyczny i alternatywny: metody oceny*, Wydawnictwo C.H. Beck, Warszawa.
- Rokach L., Maimon O.Z. (2015), *Data Mining with Decision Trees: Theory and Applications*, World Scientific Publishing, Singapore.
- Tarczyński W. (2012), *Fundamentalny portfel papierów wartościowych*, PWE, Warszawa.
- Tarczyński W., Łuniewska M. (2004), *Dywersyfikacja ryzyka na polskim rynku kapitałowym*, Wydawnictwo „Placet”, Warszawa.
- Trzpiot G., red. (2010), *Wielowymiarowe metody statystyczne w analizie ryzyka inwestycyjnego*, PWE, Warszawa.
- Trzpiot G. (2011), *Statystyczna analiza decyzji*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach, Katowice.

#### USE OF DECISION TREES TO ASSESS EFFECTIVENESS OF PORTFOLIO INVESTMENTS

**Summary:** Investments on the capital market inevitably result in making decisions. Investors who allocate their means on capital markets use different methods that are supposed to support effectiveness of their investment related decisions made. The article aims at presenting the use of an alternative method – decision trees – to assess effectiveness of portfolio investments and the value added that results from the use of the very method. The article presents the research that illustrates possible connection between a classical portfolio analysis with a wider macro-economic one. Some attention is paid to the influence of the macro-economic environment on the result of portfolio investment. The research sample in the empirical analysis involves a range of daily logarithmic rates of return of 15 companies of the WIG-developers' sector index of the Warsaw Stock Exchange.

**Keywords:** risk, portfolio investments, decision trees.