Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe
Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach
ISSN 2083-8611 Nr 366 · 2018

Joanna Utkin

Szkoła Główna Handlowa w Warszawie
Kolegium Analiz Ekonomicznych
Katedra Matematyki i Ekonomii Matematycznej
jutkin@sgh.waw.pl

ŁĄCZENIE ZAGREGOWANYCH MODELI RYNKÓW AKCJI I OBLIGACJI

Streszczenie: Celem artykułu jest wykorzystanie łączenia modeli rynków o dwupunktowych rozkładach prawdopodobieństwa do łączenia rynków wielookresowych. Wielookresowe modele składowe dane na sieci dwumianowej, poddane agregacji metodą Klaassena, sprowadza się do modeli o rozkładzie dwupunktowym. Dla modeli: cen akcji CRR i cen obligacji na sieci dwumianowej podano zagregowane ceny oraz zagregowane prawdopodobieństwa martyngałowe. Warunkiem zastosowania procedury łączenia do wymienionych modeli zagregowanych jest równość czynników dyskontujących za dany wielookresowy przedział czasu. Zagregowane modele spełniają wtedy założenia o łączonych modelach składowych; są zupełne, pozbawione możliwości arbitrażu i mają wspólną cenę wielookresowego instrumentu bezpiecznego. Otrzymano rozszerzenie metody łączenia na modele rynków wielookresowych.

Słowa kluczowe: rynek łączony, agregacja.

JEL Classification: C61.

Wprowadzenie

Niniejsze opracowanie nawiązuje do łączenia modeli dwóch rynków o dwupunktowym rozkładzie prawdopodobieństwa, omówionego w artykule [Utkin, 2016]. Metoda łączenia dotyczy dwóch modeli, gdy w każdym z nich występuje instrument ryzykowny: akcja lub obligacja wielookresowa oraz instrument bezpieczny, przy czym stopa procentowa instrumentu bezpiecznego jest dla obu rynków wspólna. W uzyskanym czterostanowym modelu rynku łączonego w dwuwymiarowej zmiennej losowej występują instrumenty ryzykowne dwóch rodzajów o znanych rozkładach brzegowych prawdopodobieństwa. Rozkład prawdopodobieństwa na rynku łączonym zależy od danego współczynnika korelacji cen akcji i obligacji. Przy założeniu zupełności i braku możliwości arbitrażu, zarówno na rynku akcji, jak i obligacji, zostało wykazane, że rynek łączony jest niezupełny oraz pozbawiony możliwości arbitrażu, a także wyznaczono zbiór rozkładów prawdopodobieństwa martyngałowego [Utkin, 2016, s. 231].

Wstępne rozważania nad rozszerzeniem metody łączenia na modele wielookresowe wskazują na różnice w oprocentowaniu bezpiecznego konta bankowego w modelach składowych. Stąd pomysł zastąpienia każdego składowego modelu wielookresowego jego wersją zagregowaną. Jeśli do agregacji zastosujemy metodę Klaassena oraz założymy odpowiedni związek czynników dyskontujących w modelach składowych, to otrzymamy nowe zastosowanie łączenia rynków o dwupunktowym rozkładzie prawdopodobieństwa.

1. Wykorzystanie agregacji w łączeniu rynków wielookresowych

Zamierzamy połączyć dwa wielookresowe modele rynków skończonych: akcji i obligacji. Powstaje problem ustalenia oprocentowania jednakowego dla obu modeli, zakładanego przy łączeniu rynków [Utkin, 2016]. Najczęściej stosowany model dynamiki cen akcji opiera się na założeniu stałego okresowego czynnika wzrostu i stałego okresowego czynnika spadku ceny akcji, jak w modelu Coxa–Rossa–Rubinsteina [van der Hoek, Elliot, 2006]. Wówczas, aby w takim modelu na sieci dwumianowej nie było możliwości arbitrażu, jednookresowa stopa procentowa musi być stała. Z kolei w modelach obligacji stopa procentowa jest losowa. Proponowanym sposobem obejścia tej niezgodności jest poddanie obu modeli agregacji Klaassena. Korzystnym efektem wtórnym będzie redukcja liczby stanów końcowych, co umożliwi wykorzystanie metody łączenia przedstawionej w artykule [Utkin, 2016].

Agregując T-okresowe modele o strukturze sieci dwumianowej, zakładamy, że w każdym modelu składowym mamy do czynienia z pewnym rozkładem Bernoulliego prawdopodobieństwa rzeczywistego. Prawdopodobieństwo hossy w każdym jednookresowym podmodelu na rynku akcji oznaczamy przez p_S, zaś na rynku obligacji – przez p_B. Ponieważ na dwumianowym drzewie niezrekombinowanym prawdopodobieństwo położenia stanu końcowego od poziomu połowy zbioru stanów w górę jest równe prawdopodobieństwu hossy w podmodelu jednookresowym, to w modelu zagregowanym przyjmiemy, że prawdopodobieństwo rzeczywiste zagregowanej hossy na rynku składowym jest równe odpowiednio p_S lub p_B.

W metodzie Klaassena, sprowadzając model T-okresowy do modelu o dwupunktowym rozkładzie prawdopodobieństwa, należy T-1 razy przeprowadzić postępowanie agregacyjne. W rezultacie otrzymuje się: zagregowane ceny końcowe instrumentu ryzykownego, czynnik dyskontujący dla modelu zagregowanego i prawdopodobieństwo martyngałowe zagregowanej hossy. Podstawową zaletą tej metody jest zachowanie wyceny bezarbitrażowej wypłaty końcowej dowolnie ustalonej na sieci.

Wyniki agregacji zależą od modelu, który jest jej poddawany.

2. Zagregowany model rynku akcji

Rozważamy T-okresowy model Coxa–Rossa–Rubinsteina. W modelu tym S_0oznacza początkową cenę akcji. W każdym podmodelu jednookresowym r oznacza stopę procentową, u – czynnik wzrostu ceny akcji, d – czynnik spadku ceny akcji, przy czym $0 < d < 1 + r < u$ [van der Hoek, Elliot, 2006, s. 25]. Na koniec pierwszego okresu cena akcji zależy od węzła sieci dwumianowej i w węźle (1,1) jest równa $S_1^1 = S_0 u$, a w węźle (1,0) jest równa $S_1^0 = S_0 d$.

Symbolem $\overset{(T-1)}{S_T^i}$ oznaczamy cenę akcji w chwili T w stanie i po T-1-krotnej agregacji. Agregacja tego modelu metodą Klaassena została przeprowadzona w pracy [Kardach, 2013]. Zgodnie z uzyskanymi tam rezultatami zagregowane końcowe ceny akcji wynoszą w górnym stanie:

$$\overset{(T-1)}{S_T^1} = (1+r)^{T-1} S_0 u, \tag{1}$$

a w dolnym stanie:

$$\overset{(T-1)}{S_T^0} = (1+r)^{T-1} S_0 d. \tag{2}$$

Wzorom (1) i (2) możemy nadać postać:

$$\overset{(T-1)}{S_T^n} = (1+r)^{T-1} S_1^n \quad , \quad n = 0{,}1. \tag{3}$$

Można zauważyć, że prawe strony wzorów (1) i (2) reprezentują ceny terminowe akcji liczone na moment 1 w węźle odpowiednio (1,1) lub (1,0), gdy dostawa akcji ma nastąpić w chwili T.

Wniosek 1. Zagregowana cena akcji jest równa cenie terminowej akcji liczonej w chwili $t = 1$ przy dostawie planowanej w chwili $t = T$.

Ponadto zagregowany czynnik dyskontujący modelu Coxa–Rossa–Rubinsteina jest równy $1/(1 + r)^T$, zaś prawdopodobieństwo martyngałowe zagregowanej hossy wynosi:

$$q_S = \frac{1+r-d}{u-d}. \tag{4}$$

3. Zagregowany model rynku obligacji

Najważniejszymi modelami opartymi na cenach obligacji zerokuponowych są modele struktury terminowej Ho–Lee i Pedersena–Shiu–Thorlaciusa [van der Hoek, Elliot, 2006]. Agregacji struktury terminowej jest poświęcony drugi rozdział książki [Utkin, 2010]. Symbolem $B_T^n(m)$ oznaczamy cenę w chwili T w stanie n obligacji zerokuponowej przewidzianej do wykupu w danym późniejszym terminie m.

Agregacja struktury terminowej w przedziale czasu $\langle 0,T\rangle$ dotyczy obligacji zerokuponowych o terminach wykupu: $m= T$ oraz późniejszych $m > T$. Z rezultatów przedstawionych w pracy [Utkin, 2010] wynika, że po T-1-krotnej agregacji cena obligacji przewidzianej do wykupu w chwili m wynosi:

$$\overset{(T-1)}{B_T^n}(m) = \frac{B_1^n(m)}{B_1^n(T)}, \; n = 0,1. \tag{5}$$

Wniosek 2. Zagregowana cena obligacji zerokuponowej przewidzianej do wykupu w terminie m jest równa cenie terminowej obligacji, liczonej w chwili $t = 1$ przy dostawie planowanej w chwili $t = T$.

Zagregowany czynnik dyskontujący za okres $\langle 0,T\rangle$ jest równy $B_0(T)$, natomiast prawdopodobieństwo martyngałowe zagregowanej hossy jest na rynku obligacji określone wzorem [Utkin, 2010, s. 50]:

$$q_A = \frac{q_0 B_1^1(T)}{q_0 B_1^1(T) + (1-q_0) B_1^0(T)}, \tag{6}$$

gdzie q_0 jest prawdopodobieństwem martyngałowym hossy w okresie $\langle 0,1\rangle$. Zatem jako prawdopodobieństwo martyngałowe w drugim modelu składowym przyjmujemy q_A w miejsce q_B.

4. Łączenie modeli zagregowanych

Agregacja metodą Klaassena T-okresowych modeli akcji, a także obligacji, sprowadza je do modeli o dwupunktowych rozkładach prawdopodobieństwa, czyli o rozkładach typowych dla modeli jednookresowych, z okresem zastąpionym przez przedział $\langle 0,T\rangle$.

Zmodyfikowanej strukturze informacyjnej modelu przyporządkowane są zagregowane ceny instrumentów ryzykownych na obu rynkach, równe ich cenom terminowym liczonym na chwilę 1 z terminem dostawy *T*. Zagregowana cena akcji jest określona wzorem (3), obligacji zaś – wzorem (5). Wymienione ceny odpowiednich walorów zastępują ich ceny końcowe w chwili 1 w modelach łączonych.

Z zastosowanej metody agregacji cen i czasu wynika, że uzyskane modele są zupełne oraz pozbawione możliwości arbitrażu. Dla każdego z zagregowanych modeli rozkład prawdopodobieństwa martyngałowego jest określony za pomocą odpowiednich wzorów (4) i (6).

Łączenie rynków opiera się na założeniu wspólnej stopy procentowej. W przypadku zagregowanych rynków składowych założymy równość obu czynników dyskontujących, mianowicie:

$$\frac{1}{(1+r)^T} = B_0(T). \tag{7}$$

Oznacza to, że stała jednookresowa stopa procentowa z rynku akcji ma być średnią stopą procentową z *T*-okresowego rynku obligacji. W modelach zagregowanych zamiast mówić o bezpiecznej stopie procentowej posługujemy się ceną bezpiecznej w modelu zagregowanym obligacji *T*-okresowej wyrażonej poprzez czynnik dyskontujący za $\langle 0,T \rangle$.

Poniżej zestawimy wielkości występujące w łączonych modelach jednookresowych [Utkin, 2016] oraz w ich zagregowanych odpowiednikach *T*-okresowych.

Tabela 1. Modyfikacja zmiennych w modelach składowych

Model jednookresowy	***T*-okresowy model zagregowany**
p_S	p_S
p_B	p_B
$1 + r$	$(1 + r)^T = 1/B_0(T)$
$S_1^i, i = 0,1$	$S_1^i(1+r)^{T-1}, i = 0,1$
$B_1^i(m), i = 0,1$	$B_1^i(m)/B_1^i(T), i = 0,1$
q_S	q_S
$q_B = q_0$	$q_A = \dfrac{q_0 B_1^1(T)}{q_0 B_1^1(T) + (1-q_0) B_1^0(T)}$

Z uwagi na metodę agregacji Klaassena losowy charakter modelu wielookresowego dotyczy jedynie cen w okresie $\langle 0,1\rangle$. W chwili 1 określone są ceny terminowe, które w przedziale czasu $\langle 1,T\rangle$ są deterministyczne. Stany rynku łączonego są wyznaczone przez cztery pary wartości dwuwymiarowej zmiennej losowej przy założeniu znajomości rozkładów brzegowych cen na rynkach składowych. Wartość zmiennej dwuwymiarowej możemy zapisać w kolumnie zawierającej w pierwszym wierszu terminową cenę akcji, a w drugim wierszu terminową cenę obligacji. Model rozważanego rynku łączonego przedstawimy na następującym drzewie zdarzeń o początku $t = 0$ i końcu w $t = T$.

$$\begin{pmatrix} S_0 \\ B_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} S_0 u(1+r)^{T-1} \\ B_1^1(m)/B_1^1(T) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0 u(1+r)^{T-1} \\ B_1^0(m)/B_1^0(T) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0 d(1+r)^{T-1} \\ B_1^1(m)/B_1^1(T) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0 d(1+r)^{T-1} \\ B_1^0(m)/B_1^0(T) \end{pmatrix}$$

Rys. 1. Model łączony zagregowanych rynków akcji i obligacji

Zgodnie z własnościami rynku łączonego [Utkin, 2016, s. 231] powyższy model jest pozbawiony możliwości arbitrażu i jest niezupełny. Co więcej, znana jest postać rozkładów prawdopodobieństwa martyngałowego.

Wniosek 3. Rozkłady prawdopodobieństwa martyngałowego w rozważanym modelu łączonym mają następujące przedstawienie parametryczne:

$$Q = \begin{pmatrix} b \\ q_S - b \\ q_A - b \\ 1 - q_S - q_A + b \end{pmatrix}, \tag{8}$$

gdzie parametr b spełnia nierówności:

$$\max\{0, q_S + q_A - 1\} < b < \min\{q_S, q_A\}. \tag{9}$$

Na rynku przedstawionym na rys. 1 wypłata W, gdzie $W^T = (W^1, W^2, W^3, W^4)$, ma następującą wartość wyceny bezarbitrażowej:

$$W^T Q B_0(T) = \\ = B_0(T)\left(b\left(W^1 - W^2 - W^3 + W^4\right) + q_S\left(W^2 - W^4\right) + q_A\left(W^3 - W^4\right) + W^4\right), \tag{10}$$

przy czym b spełnia ograniczenie (9). W przypadku gdy W jest wypłatą osiągalną, czyli spełnia równanie $W^1 - W^2 - W^3 + W^4 = 0$ [Utkin, 2016], wycena bezarbitrażowa przyjmuje jedną wartość.

Podsumowanie

Artykuł dotyczył łączenia dwóch rynków wielookresowych: akcji i obligacji. Ze względu na wymóg wspólnego instrumentu bezpiecznego zaproponowana została agregacja rynków składowych zgodnie z metodą Klaassena. Wówczas ujednolicenie instrumentu bezpiecznego wyrażono poprzez równość czynników dyskontujących w wielookresowym przedziale czasu objętym agregacją. W zagregowanych modelach składowych ceny instrumentu ryzykownego miały dwupunktowe rozkłady prawdopodobieństwa rzeczywistego. Zagregowane ceny były równe cenom terminowym liczonym w chwili 1 przy planowanej dostawie na koniec rozważanego przedziału czasu. W otrzymanym modelu łączonym podano postać rozkładu prawdopodobieństwa martyngałowego oraz wyceny bezarbitrażowej wypłat.

Literatura

Hoek J. van der, Elliot R.J. (2006), *Binomial Models in Finance*, Springer, New York.

Kardach M. (2013), *Porównanie wyników optymalizacji oczekiwanej użyteczności majątku końcowego przed i po agregacji w modelu Coxa-Rossa-Rubinsteina*, Praca magisterska napisana w Katedrze Matematyki i Ekonomii Matematycznej pod kierunkiem naukowym prof. dr hab. Joanny Utkin, SGH, Warszawa.

Utkin J. (2010), *Statyczne miary ryzyka i straty w skończonych modelach struktury terminowej*, Oficyna Wydawnicza SGH, Warszawa.

Utkin J. (2016), *Wycena entropowa na rynku łączonym*, „Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach", nr 301, s. 228-240.

JOINING OF AGGREGATED MARKET MODELS OF STOCKS AND BONDS

Summary: The aim of the paper is the application of the joining method introduced for the models with the two-point probability distribution to the multiperiod markets.The multiperiod models, given on the binomial web, are aggregated using the Klaassen method, resulting in the two-point distribution. For the CRR stock prices model and for the bond prices model on the binomial web, the aggregated prices and the aggregated martingale probabilities are given. The condition of applying the joining procedure is the equality of discount factors for both models in the multiperiod time interval. Then both aggregated models verify the assumptions needed for the joining procedure. This way we have obtained the extension of the joining method on the multiperiod models.

Keywords: joined market, aggregation.