



**Katarzyna Brzozowska-Rup**

Politechnika Świętokrzyska  
Wydział Zarządzania i Modelowania Komputerowego  
Katedra Ekonomii i Finansów  
krup@tu.kielce.pl

## SEKWENCYJNA METODA MONTE CARLO I JEJ ZASTOSOWANIE DO MODELOWANIA ZMIENNOŚCI INFLACJI W POLSCE<sup>1</sup>

**Streszczenie:** Celem artykułu jest zaprezentowanie wybranego modelu stochastycznej zmienności do opisu zmienności inflacji w Polsce, ze szczególnym uwzględnieniem możliwości zastosowania techniki estymacji wykorzystującej sekwencyjną metodę Monte Carlo (ang. *Sequential Monte Carlo method*, SMC). Przedstawiono model zmienności stochastycznej, w którym wariancja warunkowa jest traktowana jako zmienna nieobserwowana opisywana za pomocą jednoczynnikowego modelu Coxa, Ingersola i Rossa (CIR) [Cox, Ingersoll, Ross, 1985]. Zalety oraz efektywność proponowanej metody zaprezentowano na podstawie miesięcznych danych historycznych poziomu inflacji w Polsce w latach 2004-2017.

**Słowa kluczowe:** modele zmienności stochastycznej, model CIR, metoda SMC, algorytm EM, inflacja.

**JEL Classification:** C51, C53, E31, E37.

### Wprowadzenie

Modelowanie i prognozowanie inflacji nie jest zagadnieniem nowym, jednak debata nad optymalną strategią polityki pieniężnej nieprzerwanie wzbudza silne emocje. Coraz więcej banków centralnych oraz innych instytucji finansowych i gospodarczych wykorzystuje zarówno prognozy stóp procentowych, jak i inflacji jako istotny element wspomagający procesy decyzyjne. Inflacja jest najczęściej utożsamiana ze zjawiskiem długotrwałego (względnie ciągłego) wzrostu ogólnego

---

<sup>1</sup> Artykuł został przygotowany w ramach projektu finansowanego ze środków Narodowego Centrum Nauki przyznanych na podstawie decyzji numer DEC-2013/11/D/HS4/04014.

poziomu cen w gospodarce. Natomiast skokowy wzrost cen wynikający z jednorazowego wstrząsu, po którym poziom cen pozostaje na stałym poziomie, nie jest uznawany za inflację [Baranowski, 2008].

W literaturze przedmiotu najczęściej proponowane i stosowane podejścia modelowania powyższych procesów koncentrują się na modelach regresji oraz liniowych i nieliniowych modelach szeregów czasowych [Baranowski, 2008; Baranowski, Leszczyńska, Szafrński, 2010; Baranowski i in., 2013], podczas gdy w artykule proponuje się zastosowanie modelu zadanego przez stochastyczne równania różniczkowe. W tym celu na przestrzeni probabilistycznej  $(\Omega, \Sigma, P)$  jest definiowany proces stochastyczny  $\{X(t), t \in \mathbb{R}_+\}$  spełniający stochastyczne równanie Itô:

$$dX(t) = \mu(X(t), t)dt + \sigma(X(t), t)dW(t), X(0) = X_0 \quad (1)$$

gdzie  $\{W(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$  jest procesem Wienera,  $\mu(X(t), t)$ ,  $\sigma(X(t), t)$  są ciągłymi funkcjami rzeczywistymi.

Modelowanie inflacji najczęściej sprowadza się do poszukiwania opisu poziomu inflacji w zależności od wielu czynników makroekonomicznych. W praktyce badań szeregów czasowych okazuje się, że istotną rolę odgrywają zarówno wartości, jakie przyjmuje badany proces, jak i ich zmienność (mierzona zazwyczaj odchyleniem standardowym). W związku z powyższym, podejmując temat modelowania inflacji, warto rozważyć zmiany inflacji w czasie oraz skalę tych zmian. Wysoka zmienność inflacji rodzi niepewność w gospodarce, która pomimo ograniczania średniego poziomu inflacji może hamować wzrost gospodarczy. Przy okazji warto zwrócić uwagę na bardzo ciekawą dyskusję dotyczącą stabilności cen oraz stabilności inflacji, przedstawioną w artykule Błaszczyka [2010].

Podjęto próbę zbudowania modelu inflacji, który umożliwi prognozowanie jej poziomu oraz poznanie związku między inflacją a niepewnością inflacyjną. Należy podkreślić, że proponowany model (podobnie jak modele typu ARCH i GARCH) nie wyjaśnia, co jest źródłem zmienności badanego szeregu.

W prezentowanym podejściu dynamika inflacji jest opisywana za pomocą modelu, w którym warunkowa wariancja jest odrębnym procesem stochastycznym. Istota modeli tego typu (tzw. modeli zmienności stochastycznej, SV) polega na założeniu, że przyszły poziom zmienności badanego procesu podlega zmianom losowym, których źródło nie musi być tożsame ze źródłem losowości badanego procesu i dlatego nie może być precyzyjnie określany przez dostępne informacje historyczne (tj. przeszłością procesu). Pod pojęciem zmienności (ang. *volatility*) jest tu rozumiana miara niepewności co do przyszłych zmian poziomu

badanego zjawiska. Najczęściej za miarę zmienności przyjmuje się wariancję lub odchylenie standardowe wartości badanego szeregu [Pajor, 2003; Bos, 2012]. W szczególności założono, że zmienność inflacji jest wielkością dyskонтującą informacje dotyczące różnych czynników makroekonomicznych mających wpływ na zmiany w strukturze systemu gospodarczego (tzn. znajdują w niej odzwierciedlenie skutki prowadzonej polityki pieniężnej oraz informacje dotyczące zachodzących procesów makroekonomicznych odzwierciedlających stan gospodarki kraju). W związku z powyższym jej bezpośrednie zmierzenie nie jest możliwe, stąd zasadne jest przyjęcie, iż jest ona zmienną nieobserwowalną (ukrytą).

Analizie poddano miesięczne zmiany wskaźnika cen towarów i usług (ang. *Consumer Price Index*, CPI) (przyjmując poprzedni miesiąc za bazowy) obserwowane w latach 2004-2017, dostępne na stronie Głównego Urzędu Statystycznego.

Oszacowanie zaproponowanego modelu umożliwi prognozowanie zmienności inflacji, która odgrywa istotną rolę w identyfikacji oczekiwań inflacyjnych oraz kształtowaniu bieżącego poziomu inflacji.

Artykuł rozpoczyna krótki przegląd informacji dotyczących sekwencyjnej metody Monte Carlo (SMC). Przedstawiono sposób konstrukcji algorytmu umożliwiającego estymację parametrów modeli ze zmiennymi ukrytymi – algorytm łączący ideę algorytmu EM z metodą SMC (SAEM). Następnie, opierając się na opisanej metodzie, symulacjach numerycznych i danych rzeczywistych, przeprowadzono estymację jednoczynnikowego modelu Coxa, Ingersola i Rossa (CIR) dla poziomu oraz zmienności inflacji. Prezentowane wyniki stanowią punkt wyjścia do opracowania bardziej zaawansowanych modeli stochastycznej zmienności, które umożliwią efektywne modelowanie opisywanego zjawiska. Do analizy wykorzystano autorski program napisany w języku C Sharp przy użyciu Visual Studio (zintegrowane środowisko programistyczne firmy Microsoft).

## 1. Idea sekwencyjnej metody Monte Carlo

Prezentowana metoda stanowi aktywny obszar badań od 1993 r., kiedy to ukazała się oryginalna praca Gordona, Salmonda i Smitha. Od tego czasu w literaturze pojawiło się wiele prac na temat teorii, a także możliwości zastosowań metody. Wśród bogatej literatury szczególnie warto zwrócić uwagę na następujące pozycje: Doucet, de Freitas i Gordon [2001], Doucet i Johansen [2008], Kantas i in. [2015]. W literaturze zamiennie używa się nazw „sekwencyjna metoda Monte Carlo” (ang. *sequential Monte Carlo method*, SMC) oraz „filtr cząsteczkowy” (ang. *particle filter*, PF). Termin „filtr cząsteczkowy”

wprowadził do literatury Pierre Del Moral w 1996 r., natomiast terminologia „sekwencyjna metoda Monte Carlo” została zaproponowana przez Liu i Chena w 1998 r.

Metoda filtru cząsteczkowego należy do zaawansowanych metod filtracji nieliniowej, które wykorzystują metody symulacyjne do aproksymacji gęstości rozkładu a posteriori. Idea PF polega na oszacowaniu rozkładów prawdopodobieństwa docelowego przez rozkłady empiryczne skupione na zestawie próbek (zwanymi cząsteczkami), wyznaczonych przez sekwencyjny algorytm będący połączeniem dwóch metod: tzw. metody losowania istotnego (ang. *importance sampling*, IS) oraz techniki ponownego losowania, repróbkiowania (tzw. resamplingu). Pierwszy krok metody polega na generowaniu cząsteczek z odpowiednio dobranego rozkładu (tzw. funkcji losowania istotnego lub funkcji ważności), a następnie eliminowaniu tych, których prawdopodobieństwo, że pochodzą z estymowanego rozkładu, jest małe.

W celu szczegółowego przedstawienia omawianego algorytmu rozważono proces  $X_t$ , który nie jest bezpośrednio obserwowany (tzw. proces zmiennej ukrytej), a pomiary jego wartości są możliwe jedynie poprzez obserwacje procesu  $\{Y_t; t \geq 1\}$ . Do dalszych rozważań przyjęto następujące oznaczenia:  $z_{i:j} = (z_i, z_{i+1}, \dots, z_j)$  to realizacje procesu  $Z_t = (X_t, Y_t)$  od chwili  $i$  do  $j$ ,  $i \leq j$ , symbolem  $p$  wymiennie będzie oznaczane prawdopodobieństwo lub gęstość rozkładu prawdopodobieństwa, natomiast  $\theta$  to wektor parametrów modelu określony na zbiorze otwartym  $\Theta$ ,  $\Theta \subset \mathbb{R}^{n_\theta}$ .

Przy powyższych założeniach na przestrzeni probabilistycznej  $(\Omega, \Sigma, P)$  zdefiniowano model przestrzeni stanów.

**Definicja 1 (model przestrzeni stanów na przestrzeni probabilistycznej)**

Niech dynamika procesu  $\{X_t; t \geq 0\}$  będzie określona przez gęstość początkową oraz gęstość prawdopodobieństwa przejścia:

$$X_0 \sim p(x_0 | \theta) \tag{2}$$

$$X_t | (X_{0:t-1} = x_{0:t-1}, Y_{1:t-1} = y_{1:t-1}) \sim p(x_t | x_{t-1}, \theta) \tag{3}$$

O obserwacjach założono, że ich gęstość warunkowa względem procesu ukrytego jest określona wzorem:

$$Y_t | (X_{0:t-1} = x_{0:t-1}, Y_{1:t-1} = y_{1:t-1}, \theta) \sim p(y_t | x_t, \theta) \tag{4}$$

gdzie  $1 \leq t \leq T$ .

Zdefiniowanie modelu przestrzeni stanów na przestrzeni probabilistycznej jest najogólniejszą postacią modelu dynamicznego. Umożliwia rozważanie zarówno modeli liniowych, nieliniowych, gaussowskich, jak i niegaussowskich. Dodatkową zaletą powyższej definicji jest bezpośrednia możliwość wyprowadzenia wzorów filtracji bayesowskiej. Założenie (3) implikuje markowowskość procesu  $\{X_t\}$ , natomiast z założenia (4) wynika warunkowa niezależność obserwacji  $y_t$ .

Zagadnienie filtracji polega na wyznaczeniu optymalnego estymatora wartości zmiennej ukrytej  $X_t$  na podstawie zaobserwowanych wartości  $y_{1:t}$  oraz znanych rozkładów a priori. Problem ten można sprowadzić do estymacji warunkowych gęstości rozkładów a posteriori  $p(x_{1:t}|y_{1:t})$ . Podstawowe wzory filtracji bayesowskiej są następujące:

$$p(x_{1:t}|y_{1:t}, \theta) = p(x_{1:t-1}|y_{1:t-1}, \theta) \frac{p(y_t|x_t, \theta)p(x_t|x_{t-1}, \theta)}{p(y_t|y_{1:t-1}, \theta)} \propto p(x_{1:t-1}|y_{1:t-1}, \theta)p(y_t|x_t, \theta)p(x_t|x_{t-1}, \theta) \quad (5)$$

gdzie symbol  $\propto$  oznacza „jest proporcjonalne do”.

Gęstość filtracji  $p(x_t|y_{1:t}, \theta)$  jest gęstością brzegową rozkładu (5), stąd jest określana za pomocą wzoru:

$$p(x_t|y_{1:t}, \theta) = \frac{p(y_t|x_t, \theta)p(x_t|y_{1:t-1}, \theta)}{p(y_t|y_{1:t-1}, \theta)} \quad (6)$$

gdzie:

$$p(x_t|y_{1:t-1}, \theta) = \int p(x_t|x_{t-1}, \theta)p(x_{t-1}|y_{1:t-1}, \theta)dx_{t-1} \quad (7)$$

$$p(y_t|y_{1:t-1}, \theta) = \int p(x_t|x_{t-1}, \theta)p(y_t|x_{t-1}, \theta)p(x_{t-1}|y_{1:t-1}, \theta)dx_{t-1:t} \quad (8)$$

W praktyce zakłada się, że gęstości  $p(y_t|x_t, \theta)$  i  $p(x_t|x_{t-1}, \theta)$  są znane oraz  $p(y_t|y_{1:t-1}, \theta) > 0$ .

Schemat podstawowego algorytmu filtru cząsteczkowego (ang. *Sampling Importance Resampling algorithm*) przedstawia poniższy pseudokod:

### Algorytm SIR

Dla  $t = 0$

- Dla  $i = 1, \dots, N$  generujemy  $x_0^{(i)} \sim q_t(x_0 | y_{t+1}, \theta)$
- Wyznaczymy wagi  $w_0^{(i)} = \frac{1}{N}$

Dla  $t \geq 1$

- Dla  $i = 1, \dots, N$  generujemy  $x_{t+1}^{(i)} \sim q_t(x_{t+1} | x_t, y_{t+1})$
- Dla  $i = 1, \dots, N$  wyznaczamy wagi

$$w_t^{(i)} \propto \frac{p(y_t | x_t^{(i)}, \theta) p(x_t^{(i)} | x_{t-1}^{(i)}, \theta)}{q(x_t^{(i)} | x_{t-1}^{(i)}, y_t)}, \sum_{i=1}^N w_t^{(i)} = 1, w_t^{(i)} \geq 0 \quad (9)$$

Wyznaczamy wskaźnik efektywnej wielkości próby (ang. *Effective Sample Size*<sup>2</sup>):

$$N_{ESS} = \left( \sum_{i=1}^N \left( w_t^{(i)} \right)^2 \right)^{-1}$$

Jeżeli  $\hat{N}_{ESS} < N_T$ , przeprowadzamy ponowne losowanie cząsteczek *RESAMPLE*:

Generujemy  $z(i) \sim \text{Mult}(N, w_t^{(1)}, \dots, w_t^{(N)})$

aktualizujemy  $\{x_{0:t+1}^{(i)}, w_{t+1}^{(i)}\}_{i=1}^N = \{x_{0:t+1}^{(z(i))}, \frac{1}{N}\}_{i=1}^N$

w przeciwnym przypadku zachowujemy pierwotną trajektorię  $\{x_{0:t+1}^{(i)}, w_{t+1}^{(i)}\}_{i=1}^N$

Uzyskany szereg  $\{x_{0:t}^{(i)}, w_t^{(i)}\}_{i=1}^N$  stanowi podstawę do aproksymacji gęstości filtracji w chwili  $t$ , którą wyznacza się w postaci rozkładu empirycznego:

$$\hat{p}_N(x_t | y_{1:t}) = \sum_{i=1}^N w_t^{(i)} \delta(x_t - x_t^{(i)}) \quad (10)$$

gdzie  $\delta$  oznacza deltę Diraca<sup>3</sup>.

<sup>2</sup> Wskaźnik  $N_{ESS}$  przyjmuje wartość od 1 do  $N$ , resampling jest wykonywany w przypadku, gdy jego wartość jest mniejsza od założonego poziomu krytycznego  $N_T$ , o którym zazwyczaj zakłada się, że jest równy  $N/2$  [Doucet, Johansen, 2008].

<sup>3</sup> Delta Diraca (albo funkcja impulsowa)  $\delta$  jest operatorem liniowym (dystrybucją) działającym na pewnej przestrzeni funkcyjnej zdefiniowanym jako:  $\delta(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx$  o następujących własnościach:  $\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ +\infty & x = 0 \end{cases}$ ,  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$ .

Specyfika aproksymacji PF opiera się na aproksymacji gęstości filtracji  $p(x_t|y_{1:t})$  za pomocą próby uzyskanej z rozkładu istotnego określonego za pomocą funkcji losowania istotnego  $q_\theta(x_t|x_{t-1}, y_{1:t}, \theta)$  (ang. *proposal density*). Szczegółową dyskusję na temat teorii doboru funkcji losowania istotnego oraz technik resamplingu można znaleźć m.in. w pracach: Doucet, de Freitas i Gordon [2001]; Doucet i Johansen [2008]; Bolić, Djurić i Hong [2004]; Brzozowska-Rup i Dawidowicz [2009].

## 2. Algorytm SAEM

Ostatnim elementem proponowanej metody estymacji parametrów modelu ze zmiennymi ukrytymi jest krótka charakterystyka algorytmu EM (ang. *Expectation-Maximisation*) [McLachlan, Krishnan, 1997]. Metoda jest szczególnie polecana w przypadkach, gdy w analizowanym modelu występują zmienne nieobserwowane (niekompletne) i/lub bezpośrednio maksymalizacja funkcji wiarygodności jest bardziej złożona niż maksymalizacja pełnego prawdopodobieństwa. W tym celu jest definiowana tzw. funkcja pseudowiarygodności:

$$\ell_c(\theta|x_{0:T}, y_{1:T}) = \log p(x_{0:T}, y_{1:T}|\theta) \quad (11)$$

Implementacja metody przebiega w dwóch krokach wykonywanych rekurencyjnie tak długo, aż jest spełnione kryterium zbieżności.

**Krok E** (ang. *Expectation step*) polega na szacowaniu warunkowej wartości oczekiwanej (funkcji pomocniczej  $Q$ ) przy założeniu, że  $\theta_k$  jest znaną wartością estymatora parametru  $\theta$  w  $k$  iteracji:

$$\begin{aligned} Q(\theta, \theta_k) &= E[\ell_c(\theta)|y_{1:T}, \theta_k] = \\ &= \int \log p(x_{0:T}, y_{1:T}|\theta) p(x_{0:T}|y_{1:T}, \theta_k) dx_{0:T} \end{aligned} \quad (12)$$

W **kroku M** (ang. *Maximisation step*) są wyznaczane aktualne oszacowania parametrów rozkładu:

$$\theta_{k+1} := \operatorname{argmax}_\theta Q(\theta, \theta_k) \quad (13)$$

W przypadku gdy w modelu występują zmienne ukryte, rozważany problem estymacji należy rozumieć jako zagadnienie polegające na identyfikacji modelu w warunkach niepewności. W tej sytuacji proponuje się połączenie algorytmu EM z filtrem cząsteczkowym. Wykorzystano tu szczególną postać algorytmu, a mianowicie jego wersję online znaną w literaturze pod nazwą SAEM (ang. *Sequential Approximation EM algorithm*).

Idea sekwencyjnej konstrukcji algorytmu EM polega na aktualizowaniu oszacowania funkcji  $Q(\theta, \theta_t)$  w każdym momencie pojawienia się nowej obserwacji bez konieczności powtarzania całego algorytmu. Taka możliwość pojawia się wtedy, gdy funkcja pomocnicza jest addytywna i w  $t$ -tej iteracji algorytmu EM może być wyznaczana na podstawie następującej zależności rekurencyjnej:

$$Q_t(\theta) = (1 - \gamma_t)Q_{t-1}(\theta) + \gamma_t E[\ln p(x_t | x_{t-1}, \theta) | y_{1:t}, \theta_{t-1}] \quad (14)$$

gdzie  $\{\gamma_t\}_t$  jest dodatnim, nierosnącym ciągiem spełniającym następujące warunki  $\sum_t \gamma_t = \infty$ ,  $\sum_t \gamma_t^2 < \infty$ ; w praktyce najczęściej proponuje się  $\gamma_t = t^{-\alpha}$ , gdzie  $0,6 < \alpha < 0,7$ ,  $\gamma_0 = 1$  [Jank, 2006; Cappé, Moulines, 2009; Cappé, 2011]. Warto zauważyć, że w przypadku gdy gęstość łącznego rozkładu należy do wykładniczej rodziny rozkładów, tzn.:

$$p(x_{1:t}, y_{1:t} | \theta) = h(x_{1:t}, y_{1:t}) \exp(\langle \psi(\theta), S(x_{1:t}) \rangle - \varphi(\theta)) \quad (15)$$

gdzie  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  oznacza iloczyn skalarny, operator  $S(\cdot)$  jest rzeczywistą i addytywną funkcją mierzalną  $S(x_{0:t}) = \sum_{k=1}^t s_k(x_{k-1}, x_k)$  statystyk dostatecznych  $\{s_k(x_{k-1}, x_k)\}_n$  [Cappé, 2011]. Wówczas oszacowanie parametrów modelu polega na iteracyjnym wyznaczaniu wartości oczekiwanej  $S_t = E[S(x_{0:t}) | y_{1:t}, \theta_{t-1}]$  – tzw. **stochastyczny krok E**:

$$\hat{S}_t = (1 - \gamma_t)\hat{S}_{t-1} + \gamma_t \sum_{i=1}^N w_t^{(i)} s_t(x_{t-1}, x_t) \quad (16)$$

oraz maksymalizacji zmodyfikowanej postaci funkcji  $Q$  (modyfikacja funkcji  $Q$  polega na pominięciu stanu początkowego, stałej normującej oraz składnika, który nie zależy od szukanych parametrów):

**(krok M)**:

$$\bar{Q}_t(S) = E[\langle \psi(\theta), S \rangle - \varphi(\theta) | y_{1:t}, \theta_{t-1}] \quad (17)$$

Strukturę prezentowanej metody estymacji opisuje poniższy pseudokod algorytmu PF-SAEM:

### Algorytm PF-SAEM

1. Dla  $t = 0$ ,  $S_0 = 0$  zadajemy wartość początkową  $\hat{\theta}_0$
2. Dla  $1 \leq t_0$ 
  - Metodą PF konstruujemy aproksymację gęstości  $p(x_t | y_{1:t}, \theta_0)$
  - Krok S: dysponując cząsteczkami i ich wagami ze wzoru (16), wyznaczamy wartość statystyki  $\hat{S}_t$
3. Dla  $t > t_0$



- Metodą PF konstruujemy aproksymację gęstości  $p(x_t|y_{1:t}, \theta_{t-1})$
- Krok S: ze wzoru (16) wyznaczamy wartość statystyki  $\hat{S}_t$
- Krok M: wyznaczamy (uaktualniamy) oszacowania parametrów  $\hat{\theta}_t = \bar{Q}_t(\hat{S}_t)$ .

W praktyce proponuje się dla pierwszych ( $t_0$ ) 10-20 obserwacji wykonywanie tylko kroku E.

### 3. Model Coxa, Ingersolla i Rossa

Analizowany przez Coxa, Ingersolla i Rossa [1985] jednoczynnikowy model równowagi (model CIR) jest zmodyfikowaną postacią modelu Vašička [1977]. Pierwotnie został zaproponowany do opisu ewolucji krótkoterminowych stóp procentowych oraz wyceny instrumentów pochodnych na stopę procentową. W modelu zakłada się, że badany proces  $X_t$  jest modelowany przez następujące stochastyczne równanie różniczkowe:

$$dX_t = \kappa(\mu - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dW_t, X_{t_0} = x_0 \quad (18)$$

gdzie parametry  $\kappa, \mu, \sigma$  są stałe i przyjmują wartości dodatnie (w dalszej części artykułu parametry modelu będą oznaczane za pomocą wektora  $\theta = (\kappa, \mu, \sigma)$ ). Jedynym źródłem losowości (zmienności, ryzyka) w tym modelu jest proces Wienera  $W_t$ . Parametr  $\mu$  jest interpretowany jako wartość, do której w długim terminie zmierza wartość oczekiwana procesu  $X_t$ ,  $\kappa$  jako tempo powracania procesu do średniej, natomiast  $\sigma$  określa zmienność modelowanego procesu. Do szczególnie istotnych cech modelu należy fakt, że warunkowa zmienność badanego procesu jest proporcjonalna do jego wartości (co umożliwił uchwycenie zależności zmienności (ryzyka) od wartości badanego procesu, a w szczególności uwzględnienie często obserwowanej, dodatniej zależności pomiędzy wartościami badanego procesu a jego zmiennością).

Zauważono, że specyficzna cecha wnioskowania statystycznego dla procesów dyfuzji polega na tym, że chociaż procesy te są ciągłymi modelami stochastycznymi, ich obserwacji dokonuje się w czasie dyskretnym. W związku z powyższym w artykule zaproponowano transformację modelu do postaci dyskretnej zadanej równaniem różnicowym. W tym celu wykorzystano metodę Eulera-Maruyama, która w intuicyjny sposób oddaje istotę równania (18). Zazwyczaj zakłada się, że punkty czasowe  $\{t\Delta\}_{t=1}^n$  są równomiernie rozmieszczone na badanym przedziale czasowym  $[0, T]$ , gdzie  $T = n\Delta t$  oraz dla uproszczenia notacji, w szeregu  $X_0, X_{\Delta t}, \dots, X_{n\Delta t}$  pomija się  $\Delta t$ , przyjmując klasyczne ozna-

czenie szeregu  $\{X_t\}_{t=0}^n$ . Dla dostatecznie małego przyrostu czasu  $\Delta t > 0$  przyrosty  $w_t - w_{t-\Delta t}$  są niezależne i mają rozkład normalny  $N(0, \Delta t)$ . Zakładając przyrosty jednostkowe, otrzymano w przybliżeniu:

$$X_t = X_{t-1} + \kappa(\mu - X_{t-1}) + \sigma\sqrt{X_{t-1}} \varepsilon_t \quad (19)$$

gdzie  $\varepsilon_t = w_t - w_{t-1}$  ma rozkład normalny  $N(0,1)$ .

#### 4. Model stochastycznej zmienności

Technika modelowania z czasem ciągłym polega na założeniu, że dynamika badanego szeregu finansowego jest procesem dyfuzyjnym ze zmiennymi współczynnikami (dryfu i dyfuzji), o których dodatkowo zakłada się, że zależą od tzw. zmiennej ukrytej  $X_t$  będącej również procesem dyfuzyjnym. Uogólniając, idea wspomnianego modelowania polega na opisaniu dynamiki badanego procesu  $\{Y_t\}$  za pomocą układu:

$$dY_t = \alpha(t, X_t, Y_t)dt + \beta(t, X_t, Y_t)dW_{Y,t} \quad (20)$$

$$dX_t = \mu(t, X_t, Y_t)dt + \sigma(t, X_t, Y_t)dW_{X,t} \quad (21)$$

gdzie  $W_{X,t}$ ,  $W_{Y,t}$  są standardowymi, niezależnymi procesami Wienera. W literaturze można znaleźć różne propozycje postaci procesów (20) i (21). W artykule analizie poddano proces zmienności stochastycznej zadany układem (model CIR-SV):

$$Y_t = X_t + \sigma_y \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim iid N(0,1) \quad (22)$$

$$X_t = \kappa\mu + (1 - \kappa)X_{t-1} + \sigma_x \sqrt{|X_{t-1}|} \xi_t, \xi_t \sim iid N(0,1) \quad (23)$$

$$E(\varepsilon_t \xi_t) = 0$$

gdzie zmienna  $Y_t = \log(Z_t^2)$  jest zadana jako logarytm kwadratu poziomu inflacji ( $Z_t$ ) w chwili  $t$ , natomiast zmienna  $X_t$  jest nieobserwowalną miarą zmienności inflacji<sup>4</sup>, składnik losowy  $\varepsilon_t$  oraz  $\xi_t$  są niezależne i opisywane przez ciąg niezależnych zmiennych losowych o identycznym rozkładzie normalnym

<sup>4</sup> Model jest szczególną postacią modelu stochastycznej zmienności postaci:

$$\begin{cases} Z_t = \exp\left(\frac{X_t}{2}\right) \eta_t \\ X_t = X_{t-1} + \kappa(\mu - X_{t-1}) + \sigma_x \sqrt{|X_{t-1}|} \xi_t \end{cases}, \text{ gdzie } \eta_t, \xi_t \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Przekształcając odpowiednio równanie zmiennej  $Z_t$ , uzyskuje się  $\check{Y}_t = \log(Z_t^2) - E[\log(\eta_t^2)]$ ; zakładając, że  $e_t = \log(\eta_t^2) - E[\log(\eta_t^2)]$  jest niegaussowskim białym szumem z zerową wartością oczekiwaną oraz wariancją równą  $0,5\pi^2$ , można pokazać, że  $E[\log(\eta_t^2)] = 1,27$  [Pajor, 2003].

$N(0, 1)$  (ang. *independent and identically distributed*). Dodatkowo przyjęto, że zależność między inflacją a jej zmiennością jest liniowa (model umożliwia badanie sprzężenia zwrotnego zjawiska inflacji). Wartości parametru  $\kappa$  bliskie zeru świadczą o dużym nasileniu zjawiska skupiania się zmienności. Zmienność (wahania) wariancji warunkowej rośnie wraz ze wzrostem parametru  $\sigma$ . Należy zauważyć, że bezpośrednie zastosowanie równania (19) (ang. *explicit Euler-Maruyama scheme*) może prowadzić do uzyskania ujemnych wartości modelowanej zmiennej  $X_t$ . W związku z powyższym w literaturze proponuje się modyfikację powyższego równania [Alfonsi, 2005]. Jedną z najpopularniejszych postaci zakłada, że proces  $X_t$  jest generowany za pomocą zależności opisanej równaniem (23).

W badanym modelu funkcja pseudowiarygodności jest zadana wzorem:

$$\begin{aligned}
 -2Q(\theta, \theta_k) &= E[\log p(x_{0:T}, y_{1:T} | \theta_k) | y_{1:T}, \theta_k] = \\
 &= T \log(\sigma^2) + \frac{1}{\sigma^2} E \left[ \sum_{t=1}^T \left( \frac{(X_t - \mu\kappa - (1 - \kappa)X_{t-1})^2}{|X_{t-1}|} \right) | y_{1:T}, \theta_k \right] + \\
 &+ T \log(\sigma_y^2) + \frac{1}{\sigma_y^2} E[\sum_{t=1}^T (y_t - x_t)^2 | y_{1:T}, \theta_k]
 \end{aligned} \tag{24}$$

W celu uproszczenia obliczeń oraz implementacji algorytmu SAEM wprowadzono wektor sum  $S_t^{(i)}$  minimalnych statystyk dostatecznych,  $i = 0, \dots, 6$  zadanych wzorami:

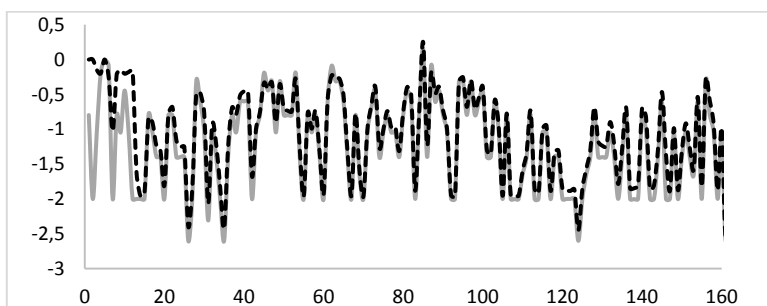
$$\begin{aligned}
 S_t^{(0)} &= \sum_{k=1}^t \frac{1}{|X_{k-1}|}, S_t^{(1)} = \sum_{k=1}^t \frac{X_{k-1}}{|X_{k-1}|}, S_t^{(2)} = \sum_{k=1}^t \frac{X_k}{|X_{k-1}|} \\
 S_t^{(3)} &= \sum_{k=1}^t \frac{X_k X_{k-1}}{|X_{k-1}|}, S_t^{(4)} = \sum_{k=1}^t \frac{X_{k-1}^2}{|X_{k-1}|}, S_t^{(5)} = \sum_{k=1}^t \frac{X_k^2}{|X_{k-1}|} \\
 S_t^{(6)} &= \sum_{k=1}^t (y_t - x_k)^2
 \end{aligned}$$

Ostatecznie na podstawie zaproponowanej metody uzyskano następujące wzory na estymatory parametrów modelu (22)-(23):

$$\begin{aligned}
 \hat{\sigma}_{x,t}^2 &= \frac{S^{(0)}((S^{(3)})^2 - S^{(4)}S^{(5)}) + S^{(2)}(S^{(2)}S^{(4)} - 2S^{(1)}S^{(3)}) + (S^{(1)})^2 S^{(5)}}{t(S^{(0)}S^{(4)} - (S^{(1)})^2)} \\
 \hat{\sigma}_{y,t}^2 &= \frac{1}{t} S^{(6)} \\
 \hat{\mu}_t &= \frac{S^{(1)}S^{(3)} - S^{(2)}S^{(4)}}{S^{(0)}(S^{(3)} - S^{(4)}) + S^{(1)}(S^{(1)} - S^{(2)})} \\
 \hat{\kappa}_t &= -\frac{S^{(0)}(S^{(3)} - S^{(4)}) + S^{(1)}(S^{(1)} - S^{(2)})}{S^{(0)}S^{(4)} - (S^{(1)})^2}
 \end{aligned}$$

## 5. Analiza empiryczna kształtowania się inflacji w Polsce

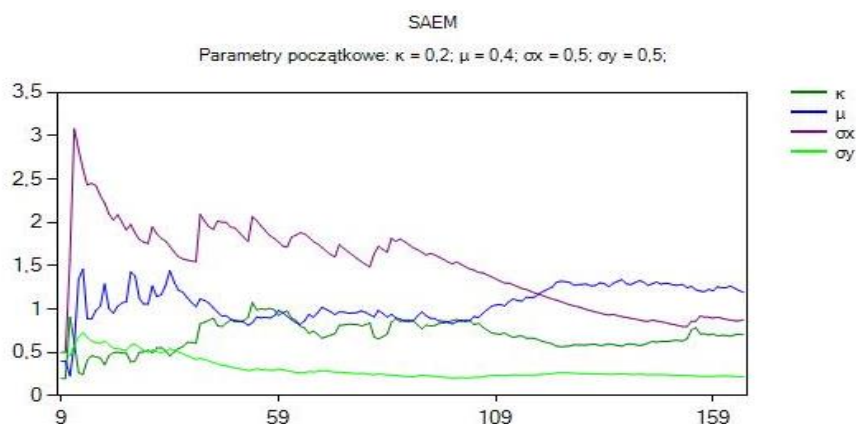
Ze względu na fakt, że Narodowy Bank Polski od 1998 r. stosuje strategię bezpośredniego celu inflacyjnego, a od stycznia 2004 r. jest realizowany ciągły cel inflacyjny ( $2,5\% \pm 1$  p.p.), analizie poddano dane z lat 2004-2017. W eksperymencie Monte Carlo ustalono jednostkę czasu  $h = 1$ , wygenerowano  $N = 5000$  replikacji trajektorii. Przeprowadzono wiele symulacji przy różnych warunkach początkowych, jednak ze względu na ograniczenia objętości artykułu przedstawiono wynik estymacji wybrany na podstawie kryterium optymalizacji błędu średniokwadratowego  $RMSE = \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ . Na rysunku 1 ukazano trajektorię szeregu  $\{y_t\}$  (wyznaczonego jako logarytm kwadratu poziomu inflacji dla danych miesięcznych od stycznia 2004 do grudnia 2017) wraz z oszacowaniem  $\{\hat{y}_t\}$  uzyskanym na podstawie modelu (22)-(23) za pomocą algorytmu PF-SAEM.



**Rys. 1.** Zestawienie wartości szeregu  $\{y_t\}$  (linia szara) oraz oszacowań wartości  $\{\hat{y}_t\}$  (czarna linia przerywana) w kolejnych iteracjach prezentowanego algorytmu PF-SAEM (oś pozioma oznacza czas  $t$ )

Źródło: Obliczenia własne.

W tabeli 1 zawarto uśrednione wyniki oceny punktowej wspomnianych parametrów z 20 niezależnych powtórzeń algorytmu.



**Rys. 2.** Wyniki oszacowań parametrów uzyskane w kolejnych iteracjach algorytmu SAEM z liczbą cząsteczek  $N = 5000$ ,  $K = 10$  z podanymi na wykresie wartościami początkowymi parametrów modelu

Źródło: Obliczenia własne.

**Tabela 1.** Oszacowania parametrów modelu CIR-SV dla miesięcznej inflacji w Polsce w latach 2004-2017. Dane wyznaczone na podstawie 20 powtórzeń algorytmu PF-SAEM

Parametry	Wartości początkowe parametrów	Uśrednione wartości oszacowań parametrów	Błąd standardowy
$\kappa$	0,200	0,654	0,393
$\mu$	0,400	1,124	0,444
$\sigma_x$	0,500	0,825	0,435
$\sigma_y$	0,500	0,325	0,241

Źródło: Obliczenia własne.

Przeprowadzona analiza wskazuje, że pomimo niewielu obserwacji badanego modelu stabilizują się oszacowania jego parametrów. Zaproponowany model w pełni wyjaśnia zmiany zachodzące w procesie zmienności inflacji. Trajektoria symulowana, po niespełna 18 iteracjach, zaczyna się idealnie dopasowywać do wykresu szeregu obserwacji (rys. 1). W wyniku 20 niezależnych powtórzeń, oprócz oszacowań punktowych parametrów, dokonano analizy ich zróżnicowania, wyznaczając przedziały zdefiniowane przez pierwszy i trzeci kwartył zbioru wartości estymatorów. Przeprowadzona analiza wskazuje, że historyczny, długoterminowy poziom zmienności inflacji  $\mu$  waha się w przedziale od 0,7% do 1,43%, podczas gdy wartość oszacowania punktowego wynosi 1,124%. Oszacowanie punktowe tempa powracania procesu do średniej (parametr  $\kappa$ ) wynosi 0,654%, z możliwymi wahaniami w przedziale od 0,3% do 0,9%. Małe wartości

parametru  $\kappa$  wskazują na małą liczbę zmian (brak dynamiki procesu). Zjawisko to, nazwane w literaturze persystencją, świadczy o tym, że inflacja w Polsce jest sztywno utrzymywana w przedziale przyjętym w celu inflacyjnym. Przypuszcza się, że jest to możliwe dzięki twardej polityce monetarnej prowadzonej przez NBP.

## Podsumowanie

Poznanie właściwości procesu inflacyjnego oraz dysponowanie możliwością wyznaczania prawdopodobnych prognoz inflacji odgrywa istotną rolę w funkcjonowaniu instytucji monetarnych, finansowych, inwestorów prywatnych oraz zwykłych obywateli, zarówno w krótko-, jak i długoterminowym horyzoncie czasowym. W artykule przedstawiono wstępne wyniki zastosowania nieliniowego modelu stochastycznej zmienności do modelowania poziomu oraz zmienności inflacji. Skoncentrowano się na prezentacji techniki estymacji online łączącej algorytm EM z filtrem cząsteczkowym. Otrzymane wyniki wskazują, że zaproponowany model z powodzeniem umożliwia wyjaśnianie zmian w procesie inflacji. Przedstawione podejście stanowi punkt wyjścia do dalszych badań, których celem będzie wykorzystanie modeli stochastycznej zmienności do weryfikacji funkcjonujących tez dotyczących relacji poziomu inflacji oraz tempa rozwoju gospodarczego.

## Literatura

- Alfonsi A. (2005), *On the Discretization Schemes for the CIR (and Bessel Squared) Processes*, "Monte Carlo Methods and Applications", Vol. 11, No. 4, s. 355-467.
- Baranowski P. (2008), *Problem optymalnej stopy inflacji w modelowaniu wzrostu gospodarczego*, Wydawnictwo Biblioteka, Łódź.
- Baranowski P., Gałęcka-Burdziak E., Górajski M., Malaczewski M., Szafrąński G. (2013), *Inflacja a mechanizmy aktualizacji cen. Studium dla Polski*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź.
- Baranowski P., Leszczyńska A., Szafrąński G. (2010), *Krótkookresowe prognozowanie inflacji z użyciem modeli czynnikowych*, „Bank i Kredyt”, nr 41(4), s. 23-44.
- Błaszczyk P. (2010), *Stabilność cen – sposoby definicji oraz wyzwania dla polityki pieniężnej*, „Materiały i Studia”, nr 249, s. 1-64.
- Bolić M., Djurić P.M., Hong S. (2004), *Resampling Algorithms for Particle Filters: A Computational Perspective*, "EURASIP Journal on Applied Signal Processing", Vol. 15, s. 2267-2277.

- 
- Bos C.S. (2012), *Relating Stochastic Volatility Estimation Methods* [w:] L. Bauwens, C. Hafner, S. Laurent (eds.), *Handbook of Volatility Models and Their Applications*, John Wiley & Sons.
- Brzozowska-Rup K., Dawidowicz A. (2009), *Metoda filtru cząsteczkowego*, „Matematyka Stosowana”, nr 10, s. 69-107.
- Cappé O. (2011), *Online EM Algorithm for Hidden Markov Models*, “Journal of Computational and Graphical Statistics”, Vol. 20(3), s. 728-749.
- Cappé O., Moulines E. (2009), *Online EM Algorithm for Latent Data Models*, “J. Roy. Statist. Soc. Ser. B”, Vol. 71(3), s. 593-613.
- Cox J.C., Ingersoll J.E., Ross S. (1985), *A Theory of Term Structure of Interest Rates*, “Econometrica”, Vol. 53, No. 2, s. 385-407.
- De Rossi G. (2010), *Maximum Likelihood Estimation of the Cox-Ingersoll-Ross Model Using Particle Filters*, “Comput. Econ.”, Vol. 36, s. 1-16.
- Doucet A., de Freitas N., Gordon N. (2001), *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, Springer Verlag.
- Doucet A., Johansen A.M. (2008), *A Tutorial on Particle Filtering And Smoothing: Fifteen Years Later*, Technical report, Department of Statistics, University of British.
- Jank W. (2006), *Implementing and Diagnosing the Stochastic Approximation EM Algorithm*, “Journal of Computational and Graphical Statistics”, Vol. 15(4), s. 803-829.
- Kantas N., Doucet A., Singh S.S., Maciejowski J., Chopin N. (2015), *On Particle Methods for Parameter Estimation in State-Space Models*, “Statistical Science”, Vol. 30, No. 3, s. 328-351.
- McLachlan G.J., Krishnan T. (1997), *The EM Algorithm and Extensions*, John Wiley & Sons.
- Olsson J., Douc R., Cappé O., Moulines E. (2008), *Sequential Monte Carlo Smoothing with Application to Parameter Estimation in Nonlinear State-space Models*, “Bernoulli”, Vol. 14(1), s. 155-179.
- Pajor A. (2003), *Procesy zmienności stochastycznej SV w bayesowskiej analizie finansowych szeregów czasowych*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Kraków.

## SEQUENTIAL MONTE CARLO METHOD AND ITS APPLICATION FOR MODELLING INFLATION VOLATILITY IN POLAND

**Summary:** The aim of the article is to present a selected model of stochastic volatility to describe inflation volatility in Poland, with particular emphasis on the possibility of using the estimation technique based on the Sequential Monte Carlo method. A model of stochastic volatility is presented, in which conditional variance is treated as an unobserved variable described by the one-factor Cox, Ingersoll and Ross model (CIR, 1985). The advantages and effectiveness of the proposed method are presented on the basis of monthly inflation rates in Poland from 2004 to 2017.

**Keywords:** CIR model, stochastic volatility models, Sequential Monte Carlo method, Expectation-Maximization (EM) algorithm, inflation.